

DM 1 : A RENDRE POUR LE MERCREDI 26 FÉVRIER

EXERCICE 1. Résoudre explicitement

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= 0 & \text{pour } (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

quand

1. la fonction u_0 est la fonction définie sur \mathbb{R} par $u_0(x) = e^{-x^2}$;

2. la fonction u_0 est la fonction indicatrice du segment $[0, 1]$ de \mathbb{R} .

Dessiner les fonctions u_0 et $u(1, \cdot)$ dans ces deux exemples, ainsi que les caractéristiques dans le plan (t, x) .

EXERCICE 2. Étant donnée une fonction u_0 sur \mathbb{R} de classe C^1 on cherche les fonctions $u = u(t, x)$ de classe C^1 sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$ solution de

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= 0 & \text{pour } (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) &= u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Soit u une solution du problème. On suppose que u est lipschitzienne en x , uniformément en $t \in [0, T]$ pour tout $T > 0$. Pour $(t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$ on note $X(\cdot; t, x)$ la caractéristique issue de (t, x) générée par u , c'est-à-dire la solution de

$$\begin{cases} X'(s) &= u(s, X(s)) & \text{pour } s \geq 0 \\ X(t) &= x. \end{cases} \quad (C)$$

1.1. Vérifier que pour tout (t, x) le système (C) a bien une unique solution globale.

1.2. Démontrer que

$$u(s, X(s; t, x)) = u(t, x)$$

pour tous t, x, s puis que pour tous t, x

$$u(t, x + t u_0(x)) = u_0(x).$$

2. Soit u_0 une fonction de classe $C^1(\mathbb{R})$.

2.1. On suppose que $u'_0 \geq 0$ sur \mathbb{R} , montrer que la relation

$$u(t, x + t u_0(x)) = u_0(x) \quad \text{pour } (t, x) \in [0, +\infty[\times \mathbb{R}$$

définit bien une fonction $u = u(t, x)$ sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$. En admettant que cette fonction u est de classe C^1 , démontrer que c'est une solution de (*).

2.2. Et si on suppose que u_0 est à support compact dans \mathbb{R} ? Montrer qu'on peut tout de même définir la solution $u(t, x)$ sur $[0, t^*] \times \mathbb{R}$ pour un certain t^* que l'on exprimera en fonction de $\inf_{\mathbb{R}} u'_0$.

2.3. Soit x un réel tel que $u_0(x) = 0$. Montrer que $u(t, x) = 0$ pour tout t . En déduire que si u_0 est à support compact dans \mathbb{R} , alors pour tout t où la solution est bien définie

$$\int_{\mathbb{R}} u(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx.$$