Feuille d'exercice 1

Exercice 1. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On note $\mathbb{R}^+ = [0,\infty[$. Trouver toutes les solutions dans $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + c\,\partial_x u = u, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ \qquad u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose diagonalisable dans la base $(R_i)_{1\leq i\leqslant n}$ de valeurs propres $(\lambda_i)_{1\leq i\leqslant n}$. Soit $U_0 \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^n)$. Trouver toutes les solutions dans $U \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\,;\mathbb{R}^n)$ du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t U + A\,\partial_x U = 0, \\ \qquad U(0,x) = U_0(x), \end{cases}$$

en fonction des R_i, des λ_i et de U_0.

Exercice 3. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + (x^2-1)\partial_x u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+\times]-1,1[\,, \\ \qquad u(0,x) = u_0(x) \in C^1(]-1,1[;\mathbb{R}). \end{cases} \tag{1}$$

1. Calculer l'équation des caractéristiques.
2. Donner explicitement l'unique solution du problème (1) dans $C^1(\mathbb{R}^+\times]-1,1[)$.
3. Que se passe-t-il si on ne se restreint pas à $x \in]-1,1[$?

Exercice 4. Soit $f^0 : (x,v) \mapsto f^0(x,v)$ une fonction de $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *positive* et à support compact. On considère l'équation de transport suivante :

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = 0$$
$$f(0,x,v) = f^0(x,v) \geqslant 0$$

où $\nabla_x f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f \cdots \partial_{x_n} f)^T$.

1. Donner l'unique solution de cette équation de transport dans la classe $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ en fonction de f^0.
2. Montrer que $f \geq 0$ et que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est conservée, i.e. :
$$\int\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v = \int\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f^0(x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v, \quad \forall t \geq 0.$$
3. On note $\rho(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t,x,v)\mathrm{d}v$. Montrer que
$$\forall t > 0, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \rho(t,x) \leqslant \frac{C_0}{t^n}$$
et que $C_0 = \int_z \sup_w f^0(z,w)\mathrm{d}z$ convient.

4. Qu'est-ce que cela signifie qualitativement sur la solution ?

Exercice 5. On considère l'équation des ondes (à vitesse c) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2}$$

où f et g sont respectivement $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}$. Démontrer que le problème (2) possède une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ donnée par

$$u(t,x) = U_1(x-ct) + U_2(x+ct),$$

où

$$U_1(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(y)dy, \quad U_2(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(y)dy\,.$$

Exercice 6. On considère le problème

$$\begin{cases} \partial_t u - 7\,\partial_x u = 0, & t \geq 0,\ x \leq 0, \\ u(0,x) = x + x^3, & x \leq 0, \\ u(t,0) = 7t, & t \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Trouver une solution $u(t,x)$ de (3) qui est de classe C^1. Que vaut $u(5,-3)$ et $u(1,-10)$?

Exercice 7. Soit $g \in C^1(\mathbb{R}^+;\mathbb{R})$. Trouver une solution de classe C^1 du problème suivant :

$$\begin{cases} x\partial_y u - y\partial_x u = u, & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ u(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |x-y| < r\}, \quad \partial B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \colon |x-y| = r\}.$$

Démontrer que pour $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a l'égalité

$$\frac{d}{dr}\Big(\int_{B(x,t)} f(y)dy \Big) = \int_{\partial B(x,t)} f(y)dS(y).$$

Exercice 9. Soit $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Démontrer que

$$u(t,x) = \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} g(x+ty)dS(y), \quad t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^3$$

est une solution de

$$(\partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2)u = 0, \quad u(0,x) = 0,\, \partial_t u(0,x) = g(x).$$

Exercice 10. Soit $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ et $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Démontrer que

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} f(x+ty)dS(y)\Big) + \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} g(x+ty)dS(y), \quad t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^3$$

est une solution de

$$(\partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2)u = 0, \quad u(0,x) = f(x),\, \partial_t u(0,x) = g(x).$$

Démontrer que si f et g sont à support dans $\{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x| < R\}$, $R > 0$ alors $u(t,x)$ est à support dans

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \colon t - R \leq |x| < t + R\}, \quad t \geq 0.$$

En déduire que si f et g sont à support compact alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, il existe t_0 tel que $u(t,x) = 0$ pour $t \geq t_0$.

Exercice 11. Soit $u \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}^n)$, $T > 0$ une solution de

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0, \tag{4}$$

où Δ est l'opérateur de Laplace sur $\mathbb{R}^n$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $t_0 \in]0,T]$. Supposons que

$$u(0,x) = \partial_t u(0,x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } |x - x_0| \leq t_0.$$

Démontrer que $u(t,x) = 0$ pour t, x tels que

$$0 \leq t \leq t_0, \quad |x - x_0| \leq t_0 - t.$$

En déduire que si $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ est une solution de (4) telle que $u(0,x)$ et $\partial_t u(0,x)$ sont à support dans $\{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x| < R\}$, $R > 0$ alors $u(t,x)$ est à support dans

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x| < t + R\}, \quad t \geq 0.$$

Exercice 12. Pour $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ on pose

$$u(t,x) = \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} g(x+ty)dS(y), \quad t \in \mathbb{R},\, x \in \mathbb{R}^3.$$

Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout g satisfaisant

$$g \in L^1(\mathbb{R}^3), \quad \nabla u \in L^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$$

on a l'inégalité

$$|u(t,x)| \leq \frac{C}{1+t}(\|g\|_{L^1} + \|\nabla g\|_{L^1}), \quad \forall t \geq 0,\, \forall\, x \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 13. Démontrer que pour tour $R > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour tout $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ à support dans $\{x \in \mathbb{R}^3 \colon |x| < R\}$, on a l'inégalité

$$\Big|\frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} g(x+ty)dS(y)\Big| \leq \frac{C}{1+t}\sup_{|y|\leq R}|g(y)|, \quad \forall t \geq 0,\, \forall\, x \in \mathbb{R}^3.$$