École Normale Supérieure de Lyon **Année 2024–2025**

Département de Mathématiques **L3 : Analyse-EDP**

FEUILLE D'EXERCICE 3

EXERCICE 1. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi}\, e^{-\varepsilon|x|^2}\, dx = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\varepsilon}}\,, \quad \xi \in \mathbb{R}^n\,,$$

où pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$x \cdot \xi = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j, \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2\,.$$

EXERCICE 2. Soit $1 \leq p < r < q \leq \infty$. Démontrer que

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\theta}\, \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}$$

où

$$\theta = \frac{p(q-r)}{r(q-p)}\,.$$

EXERCICE 3. Soit $p \in [1, \infty]$. Démontrer que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \Big| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x) dx \Big|,$$

où

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

EXERCICE 4. Soit $p, q, r \geq 1$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2.$$

Démonter que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$ l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) h(x-y) dx dy$$

est absolument convergente et qu'il existe $C > 0$ tel que tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$,

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) h(x-y) dx dy \Big| \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\, \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Exercice 5 (inégalité d'Young). Soit $p, q, r \geq 1$ tels que

$$1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\,.$$

Démontrer que pour $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

et qu'il existe $C > 0$ tel que tout $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \, \|g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Exercice 6 (lemme de Schur). Soit $K \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| dy \leq \Lambda, \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x,y)| dx \leq \Lambda.$$

Pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) f(y) dy.$$

Démontrer que pour $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{1}$$

En déduire que T admet une unique extension à $L^p(\mathbb{R}^n)$ qui satisfait (1).

Exercice 7. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $t > 0$, on pose

$$(Tf)(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy.$$

1. Démontrer que T est bien défini.
2. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Démontrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\|T(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Exercice 8. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et $t > 0$, on pose

$$(Tf)(t,x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy.$$

1. Démontrer que $(Tf)(t,x)$ est de classe $C^\infty\big((0,\infty) \times \mathbb{R}\big)$. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et $t > 0$,

$$\|\partial_x T(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\, t^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

et

$$\|\partial_x^2 T(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\, t^{-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\,.$$

Exercice 9. Pour $\alpha > 0$, on considère la fonction $g_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

1. Démonter que $g_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2. Démontrer qu'il existe $\theta > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} \, e^{-\frac{1}{2} t^{-\alpha}} .$$

3. Supposons de plus que $\alpha > 1$. Démontrer que la série

$$u_\alpha(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} \, x^{2k}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$$

   converge uniformément sur les compactes de $\mathbb{R}^2$. Démontrer que

$$|u_\alpha(t,x)| \leq v_\alpha(t,x),$$

   où

$$v_\alpha(t,x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t}\left(\frac{x^2}{\theta} - \frac{1}{2} t^{1-\alpha}\right)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

   En déduire que $u_\alpha(0,x) = 0$.
4. Démontrer que $u_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et que

$$\partial_t u_\alpha(t,x) - \partial_x^2 u_\alpha(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

   avec

$$u_\alpha(0,x) = 0,$$

   i.e. l'équation de la chaleur admet une infinité de solutions de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ avec condition initiale 0.
5. Démontrer que pour tout $\delta > 0$ il existe des constantes $M \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ et une solution u de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ de

$$\partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u(0,x) = 0$$

   qui n'est pas identiquement 0 et qui satisfait

$$|u(t,x)| \leq A e^{M|x|^{2+\delta}}, \quad \forall \, (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

   Remarque. On peut démontrer que l'unique solution de

$$\partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u(0,x) = 0$$

   qui satisfait

$$\exists \, M \in \mathbb{R}, \exists \, A \in \mathbb{R}, \forall \, (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \, |u(t,x)| \leq A e^{M|x|^2}$$

   est $u \equiv 0$.