École Normale Supérieure de Lyon **Année 2024–2025**

Département de Mathématiques **L3 : Analyse-EDP**

Feuille d'exercice 4

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 . Soit $F_1, F_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$F_1(x,y) = |x-y|, \quad F_2(x,y) = \operatorname{sgn}(x-y)(f(x)-f(y)).$$

Démontrer que F_1 et F_2 sont localement Lipschitz.

Exercice 2. Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$. Pour $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ on dit que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ est une solution entropique de

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad u|_{t=0} = u_0$$

si pour tout $\eta \in C^2(\mathbb{R})$, $\eta'' \geq 0$,

$$\eta(u), q(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \quad (q' = \eta' f')$$

et pour tout $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \Big(\eta(u(t,x))\partial_t\varphi(t,x) + q(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\Big)dtdx + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x))\varphi(0,x)dx \geq 0.$$

Démontrer que si u est une solution entropique alors u est une solution faible, c'est à dire que pour tout $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \Big(u(t,x)\partial_t\varphi(t,x) + f(u(t,x))\partial_x\varphi(t,x)\Big)dtdx + \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\varphi(0,x)dx = 0.$$

Exercice 3. Soit $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes de classe C^2 et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h' = f'g'$. Démontrer que pour tout $x > y$,

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \leq (x-y)(h(x) - h(y)) .$$

Exercice 4 (*onde de choque entropique*). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, strictement convexe. On s'intéresse au problème

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{1}$$

avec

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g, & x < 0, \\ u_d, & x > 0, \end{cases}$$

où u_g, u_d sont deux nombres réels. Supposons que $u_d < u_g$. Démontrer que la solution entropique de (1) est donnée par

$$u(t,x) = u_0(x - \sigma t),$$

avec

$$\sigma = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} .$$

Exercice 5 (*onde de détente*). Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, strictement convexe. On pose $a = f'$. On s'intéresse au problème

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{2}$$

avec

$$u_0(x) = \begin{cases} u_g, & x < 0, \\ u_d, & x > 0, \end{cases}$$

où u_g, u_d sont deux nombres réels. Supposons que $u_d > u_g$. Démontrer que la solution entropique de (2) est donnée par

$$u(t,x) = v(x/t),$$

avec

$$v(\xi) = \begin{cases} u_g, & \xi < a(u_g), \\ a^{-1}(\xi), & a(u_g) \le \xi \le a(u_d), \\ u_d, & \xi > a(u_d), \end{cases}$$

où a^{-1} est la fonction inverse de a (qui est bien définie parce que $a' > 0$).