
Feuille d'exercice 5 : Équation de la chaleur

Exercice 1. On note g_t le noyau de la chaleur, défini par :

$$\forall t > 0, x \in \mathbb{R}^d\,,\ g_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Pour une donnée initiale $f \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$, on pose $u(x,t) := (f \star g_t)(x)$.

1. Montrer que u est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^d \times]0,+\infty[$ et vérifie
$$\forall t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^d\,,\ \partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t)$$
d'une part, et d'autre part
$$\forall x \in \mathbb{R}^d\,,\ u(x,t) \underset{t\to 0}{\to} f(x)$$
2. Pour $d = 1$, montrer que pour $p \in [1, +\infty]$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^1 \cap L^\infty$ et $t > 0$
$$\|\partial_x u(t,\cdot)\|_{L^p} \le C t^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p}$$
et
$$\|\partial^2_{xx} u(t,\cdot)\|_{L^p} \le C t^{-1} \|f\|_{L^p}.$$

Exercice 2 (Semi-groupe de la chaleur). Avec les notations précédentes, pour $f \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$ et $t > 0$, on définit

$$S_t f : \left|\begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto (f \star g_t)(x) \end{array}\right.$$

et on pose $S_0 f = f$.
Montrer que :

1. si $f \ge 0$ alors $S_t f \ge 0$ pour tout $t \ge 0$
2. pour $s, t \ge 0$, $S_{t+s} = S_t \circ S_s$ (propriété de semi-groupe).

Exercice 3 (Inégalité de concentration gaussienne). On garde toujours les notations précédentes et on fixe $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ telle que f et ∇f soient bornées, précisément $\|\nabla f\|_\infty \le L$ pour une constante $L > 0$.

1. On fixe $t \ge 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ et on définit
$$\text{Pour } 0 \le s \le t\,,\ \phi(s) := S_s\left(e^{S_{t-s} f}\right)(x)$$
Montrer que
$$\phi'(s) = S_s\left(|\nabla F|^2 e^F\right)\,,\ 0 < s < t$$
où $F(x,s) := S_{t-s} f(x)$.
En déduire que
$$S_t(e^f)(x) \le e^{S_t f(x) + L^2 t}$$

2. On note γ la mesure gaussienne standard sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^f \, d\gamma \leq e^{\int_{\mathbb{R}^d} f \, d\gamma + \frac{L^2}{2}}$$

3. Montrer qu'on a égalité si $f(x) = a \cdot x$ avec $|a| = L$.
4. Montrer que pour toute fonction $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ 1-lipschitzienne, on a

$$\forall r > 0 \, , \; \gamma \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq r + \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\gamma \right\} \leq e^{-\frac{r^2}{2}}$$

Exercice 4 (Inégalité de Hölder par la chaleur). On va montrer l'inégalité de Hölder en utilisant l'équation de la chaleur : pour $\theta \in [0,1]$ et f, g mesurables positives :

$$(L) \; : \; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^\theta g(x)^{1-\theta} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, dx \right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) \, dx \right)^{1-\theta}$$

$$(G) \; : \; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^\theta g(x)^{1-\theta} d\gamma(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, d\gamma(x) \right)^\theta \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) \, d\gamma(x) \right)^{1-\theta}$$

On se place ici dans le cas $f, g \in C_b^0 \cap L^1$ pour limiter les calculs.

1. Soit $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$ fixés, pour $0 \leq s \leq t$ on pose

   $$\phi(s) := S_s \left[(S_{t-s} f)^\theta \, (S_{t-s} g)^{1-\theta} \right] (x)$$

   et

   $$F := \ln S_{t-s} f \, , \; G := \ln S_{t-s} g \, , \; K := \theta F + (1-\theta) G$$

   de sorte que $\phi(s) = S_s(e^K)(x)$.
   Montrer que

   $$\phi'(s) = S_s \left[e^K \left(|\nabla K|^2 - \theta |\nabla F|^2 - (1-\theta) |\nabla G|^2 \right) \right] (x) \leq 0$$

2. En déduire (G).
3. En déduire (L).