TD6 : Espaces de Sobolev et un peu d'elliptique

Exercice 1. Suites régularisantes

1. Construire une suite de fonctions $(\theta_n)_n$ vérifiant :

$$\theta_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)\,,\ \mathrm{supp}(\theta_n) \subset \mathbf{B}(0,1/n)\,,\ \int_{\mathbb{R}^d} \theta_n = 1\,,\ \theta_n \geq 0$$

On notera dans la suite $u_n := u \star \theta_n$ pour une fonction u donnée.

2. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$, montrer que $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que (u_n) converge uniformément vers u sur tout compact de $\mathbb{R}^d$.
3. Soit $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p < +\infty$, montrer que $u_n \in L^p \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et que (u_n) converge vers u dans L^p.
4. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\theta_n(x)dx = u(0)$ (autrement dit, $\theta_n \to \delta_0$ au sens des distributions).
5. Soit $u \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d)$ uniformément continue, montrer que (u_n) converge vers u uniformément sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2. Etude de $W^{1,p}(0,1)$

1. *Caractérisation de* $W^{1,p}$
   (a) Pour $p \geq 1$, on considère l'espace $W^{1,p}(0,1)$ défini de la façon suivante

   $$u \in W^{1,p}(0,1) \quad \text{ssi} \quad u \in L^p(0,1) \text{ et } \exists v \in L^p(0,1)\,,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)\,,\ \int_0^1 u\varphi' = -\int_0^1 v\varphi.$$

   Justifier qu'étant donnée $u \in W^{1,p}(0,1)$, un tel v est unique dans $L^p(0,1)$, on notera $v = u'$.

   (b) Montrer que la norme

   $$\|u\|_{W^{1,p}(0,1)} = \|u\|_{L^p(0,1)} + \|u'\|_{L^p(0,1)}$$

   munit $W^{1,p}(0,1)$ d'une structure d'espace de Banach.

   (c) Justifier que pour toute fonction $u \in W^{1,p}(0,1)$, il existe un représentant continu $\overline{u} \in C^0([0,1])$ vérifiant
      i. $u(x) = \overline{u}(x)$ p.p. $x \in (0,1)$,
      ii. il existe une constante $c > 0$ ne dépendant pas de u telle que

      $$\forall x \in [0,1]\ \ |\overline{u}(x)| \leq c\|u\|_{W^{1,p}},$$

      iii. pour $x, y \in [0,1]$

      $$\overline{u}(x) - \overline{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,dt,$$

iv. si de plus $p > 1$ alors pour $x, y \in [0,1]$

$$|\overline{u}(x) - \overline{u}(y)| \leq \|u'\|_{L^p} |x-y|^{\frac{1}{q}}$$

où $q < +\infty$ est l'exposant conjugué de p.

2. *Caractérisation de* $W_0^{1,p}$
   (a) On note $W_0^{1,p}(0,1) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)}$ où l'adhérence est prise par rapport à la norme $W^{1,p}$. On pose également $W_0 = \{u \in W^{1,p}(0,1)\,; u(0) = u(1) = 0\}$ ($u(0)$ et $u(1)$ sont bien définis, puisque u est identifiée à son représentant continu). Montrer que, pour $p \neq \infty$, on a $W_0^{1,p}(0,1) \subset W_0$.
   (b) Soit $u \in W_0$ et $p \neq \infty$. Montrer qu'il existe $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$ vérifiant $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 0$ tel que l'on ait $\varphi_n \to u'$ dans $L^p(0,1)$. En déduire que $W_0^{1,p}(0,1) = W_0$.
3. *Formule de Green et application*
   (a) Montrer que $W^{1,p}(0,1) = W_0^{1,p}(0,1) \oplus \mathbb{P}_1$. En déduire que $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ est dense dans $W^{1,p}(0,1)$ (où on note $\mathbb{P}_1$ l'espace des fonctions affines).
   (b) Soit u et $v \in W^{1,1}(a,b)$, montrer que $uv \in W^{1,1}(a,b)$, $(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$ et que

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

   Si de plus $u \in W^{1,p}(a,b)$ et $v \in W^{1,q}(a,b)$, $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, en déduire que $u\,v \in W^{1,p}(a,b)$.
   (c) Soit $a < b < c$. Pour $u \in L^p(a,c)$, on note $u_g = u_{|_{(a,b)}}$ et $u_d = u_{|_{(b,c)}}$. Montrer que

$$u \in W^{1,p}(a,c) \iff \begin{cases} u_g \in W^{1,p}(a,b), \\ u_d \in W^{1,p}(b,c), \\ u_g(b) = u_d(b) \end{cases}$$

Exercice 3. Inégalités de Poincaré, Poincaré-Wirtinger et de Deny-Lions

1. Montrer à l'aide du Théorème d'Ascoli que l'injection $H^1(0,1) \to C[0,1]$ est une application compacte, où $H^1(0,1) = W^{1,2}(0,1)$.
2. On veut démontrer par l'absurde qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(0,1), \qquad \|u\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2}$$

   (a) Vérifier que nier cette inégalité entraîne l'existence d'une suite u_n de $H^1(0,1)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \|u_n\|_{L^2} = 1, \qquad \|u_n'\|_{L^2} < \frac{1}{n}$$

   (b) Montrer qu'il existe une fonction $u \in L^2(0,1)$ telle que $\|u\|_{L^2} = 1$ et telle que, après extraction d'une sous-suite (renommée u_n), on ait $u_n \to u$ dans $L^2(0,1)$ lorsque $n \to +\infty$.
   (c) Montrer que u est une fonction constante appartenant à $H_0^1(0,1)$ et établir une contradiction.

3. Pour une fonction $u \in H^1(0,1)$, on note sa moyenne

$$\overline{u} = \int_0^1 u(x)\,dx$$

Montrer par l'absurde qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall u \in H^1(0,1), \qquad \|u - \overline{u}\|_{L^2} \leq C\|u'\|_{L^2}$$

4. On note Π_1 la projection orthogonale, dans $H^1(0,1)$, sur l'espace $\mathbb{P}_1$ des fonctions affines. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in H^2(0,1)\,,\ \|u - \Pi_1 u\|_{H^1} \leq C\|u''\|_{L^2}$$

Exercice 4. Une caractérisation équivalente

1. Soit $1 \leq p < +\infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, montrer que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.
2. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $u \in L^p(I)$ avec $1 < p \leq +\infty$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $u \in W^{1,p}(I)$
   (ii) il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)\,,\ \left|\int_I u\varphi'\right| \leq C\|\varphi\|_{L^{p'}(I)}$$

   (iii) il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout intervalle ouvert $w \subset\subset I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h| < d(\omega, I^c)$ on a

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|$$

   De plus, on peut choisir $C = \|u'\|_{L^p(I)}$.

Exercice 5 (Formule de la moyenne).

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ harmonique (i.e. $\Delta u = 0$). Pour $x \in \Omega$ et r tel que $B(x,r) \subset \Omega$, on définit

$$m(x,r) = \frac{1}{\sigma(\partial B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)} u(s)\mathrm{d}\sigma(s).$$

où σ est la mesure de Lebesgue sur la sphère.

1. Montrer que $m(x,r) = u(x)$. On dit que u vérifie la *formule de la moyenne*. Á quoi cette formule vous fait-elle penser si $d = 2$?
   Indication : On pourra définir pour r suffisamment petit $\varphi(r) = m(x,r)$ et montrer que φ est dérivable de dérivée nulle.
2. Montrer qu'on a une formule analogue pour

$$M(x,r) = \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y)\mathrm{d}\lambda(y).$$

   où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

3. Comment se comporte u par rapport à sa moyenne si on a juste $\Delta u \geqslant 0$?
4. Montrer que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ vérifie la propriété de la moyenne, alors u est harmonique.

Exercice 6 (Principe du maximum fort).
On suppose Ω connexe. Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ harmonique et bornée.

1. Montrer que si u atteint son maximum en un point intérieur à Ω, alors u est constante. En déduire que u atteint son maximum au bord de Ω si Ω est borné.
2. En déduire qu'il y a unicité au problème (avec Ω borné) :

$$\text{Trouver } u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \text{ tel que } \begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ \quad u = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Exercice 7 (Régularité des fonctions harmoniques).

1. Montrer que si $u \in C^2(\Omega)$ vérifie la propriété de la moyenne, alors u est de classe C^∞.
Indication : On pourra utiliser une régularisation de l'unité ρ_ε avec ε suffisamment petit.
2. Montrer qu'on a en sus pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$ et $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \Omega$:

$$|D^\alpha u(x)| \leqslant \frac{C}{r^{d+k}} \|u\|_{L^1(B(x,r))}$$

avec C ne dépendant que de k et de la dimension et $|\alpha| = k$. (on peut en fait montrer que u est analytique).
3. En déduire le théorème de Liouville : si u est harmonique sur $\mathbb{R}^n$ et bornée alors u est constante.

Exercice 8 (Harnack).
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Démontrer que pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ connexe (ω relativement compact), il existe une constante $C_\omega > 0$ telle que pour tout u fonction harmonique et positive sur Ω,

$$\sup_\omega u \leqslant C_\omega \inf_\omega u.$$

Exercice 9 (Solution fondamentale du laplacien sur $\mathbb{R}^2$).
Soit

$$T : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \ln(\|x\|) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}.$$

1. Montrer que pour $x \neq 0$, $\Delta T(x) = 0$.
2. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Exprimer

$$A_\varepsilon = \int_{\|x\|>\varepsilon} T(x) \Delta\varphi(x)$$

en fonction d'une intégrale sur le contour $S(0, \varepsilon)$ (P.S. merci de faire un dessin).
3. Que vaut $\lim_{\varepsilon \to 0} A_\varepsilon$?
4. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. En déduire qu'une solution de $\Delta u = f$ est donnée par $f \star T$.