

DM 1 : A RENDRE POUR LE MERCREDI 25 FÉVRIER 2026

EXERCICE 1. Pour $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , on appelle divergence de u en $x \in \mathbb{R}^n$ le nombre

$$\operatorname{div} u(x) = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} u_k(x).$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, on note $t \mapsto \Phi_t(x)$ la solution de l'équation différentielle associée à A :

$$y' = Ay, \quad y(0) = x.$$

On note m la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n .

1. Justifier que l'équation ci-dessus admet bien une unique solution globale. On pose $u : x \mapsto Ax$, calculer $\operatorname{div} u(x)$, $\Phi_t(x)$ et $m(\Phi_t(K))$ où K est un compact de \mathbb{R}^n .

2. On fixe $n = 2$ et $K = [1, 2] \times [1, 2]$, dans chacun des cas suivants pour A , expliciter $\operatorname{div} u(x)$, $\Phi_t(x)$ et $m(\Phi_t(K))$ et dessiner $\Phi_t(K)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 2. Soit a un réel, ε un réel positif et $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et de classe C^1 . On considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon u^2 = 0, & t \geq 0, x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

portant sur la fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto u(t, x)$.

1. Dans cette question **uniquement** on suppose que $\varepsilon = 0$. Montrer que le problème (1) admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et en donner la forme explicite.

On suppose dorénavant que $\varepsilon > 0$.

2. Dans cette question on suppose que $u_0(x) \leq 0$ pour tout réel x . Montrer que le problème (1) admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ et en donner la forme explicite.

3. Dans cette question on suppose que $u_0(x) \geq 0$ pour tout réel x . Montrer qu'il existe un réel $T > 0$, que l'on estimera, tel que le problème (1) admette une unique solution $u \in C^1([0, T[\times \mathbb{R})$.

4. Reprendre les questions 2 et 3 dans le cas où a n'est plus une constante mais une fonction $a \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, lipschitzienne en x , uniformément en t .