

## DM 1 : A RENDRE POUR LE MERCREDI 25 FÉVRIER 2026

**EXERCICE 1.** Pour  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ , on appelle divergence de  $u$  en  $x \in \mathbb{R}^n$  le nombre

$$\operatorname{div} u(x) = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k} u_k(x).$$

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , pour  $x \in \mathbb{R}^n$  fixé, on note  $t \mapsto \Phi_t(x)$  la solution de l'équation différentielle associée à  $A$  :

$$y' = Ay, \quad y(0) = x.$$

On note  $m$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

**1.** Justifier que l'équation ci-dessus admet bien une unique solution globale. On pose  $u : x \mapsto Ax$ , calculer  $\operatorname{div} u(x)$ ,  $\Phi_t(x)$  et  $m(\Phi_t(K))$  où  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ .

**2.** On fixe  $n = 2$  et  $K = [1, 2] \times [1, 2]$ , dans chacun des cas suivants pour  $A$ , expliciter  $\operatorname{div} u(x)$ ,  $\Phi_t(x)$  et  $m(\Phi_t(K))$  et dessiner  $\Phi_t(K)$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**EXERCICE 2.** Soit  $a$  un réel,  $\varepsilon$  un réel positif et  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée et de classe  $C^1$ . On considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon u^2 = 0, & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1)$$

portant sur la fonction  $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(t, x) \mapsto u(t, x)$ .

**1.** Dans cette question **uniquement** on suppose que  $\varepsilon = 0$ . Montrer que le problème (1) admet une unique solution  $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  et en donner la forme explicite.

On suppose dorénavant que  $\varepsilon > 0$ .

**2.** Dans cette question on suppose que  $u_0(x) \leq 0$  pour tout réel  $x$ . Montrer que le problème (1) admet une unique solution  $u \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  et en donner la forme explicite.

**3.** Dans cette question on suppose que  $u_0(x) \geq 0$  pour tout réel  $x$ . Montrer qu'il existe un réel  $T > 0$ , que l'on estimera, tel que le problème (1) admette une unique solution  $u \in C^1([0, T] \times \mathbb{R})$ .

**4.** Reprendre les questions 2 et 3 dans le cas où  $a$  n'est plus une constante mais une fonction  $a \in C^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ , lipschitzienne en  $x$ , uniformément en  $t$ .