

FEUILLE D'EXERCICE 1

**Exercice 1.** Soit  $c \in \mathbb{R}$  et  $u_0 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . On note  $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ . Trouver toutes les solutions dans  $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + c \partial_x u = u, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

**Exercice 2.** Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$  que l'on suppose diagonalisable dans la base  $(R_i)_{1 \leq i \leq n}$  de valeurs propres  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Soit  $U_0 \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ . Trouver toutes les solutions dans  $U \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t U + A \partial_x U = 0, \\ U(0, x) = U_0(x), \end{cases}$$

en fonction des  $R_i$ , des  $\lambda_i$  et de  $U_0$ .

**Exercice 3.** On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + (x^2 - 1) \partial_x u = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times ]-1, 1[, \\ u(0, x) = u_0(x) \in C^1(]-1, 1[; \mathbb{R}). \end{cases} \quad (1)$$

1. Calculer l'équation des caractéristiques.
2. Donner explicitement l'unique solution du problème (1) dans  $C^1(\mathbb{R}^+ \times ]-1, 1[)$ .
3. Que se passe-t-il si on ne se restreint pas à  $x \in ]-1, 1[$  ?

**Exercice 4.** Soit  $f^0 : (x, v) \mapsto f^0(x, v)$  une fonction de  $C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  positive et à support compact. On considère l'équation de transport suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f &= 0 \\ f(0, x, v) &= f^0(x, v) \geq 0 \end{aligned}$$

où  $\nabla_x f = (\partial_{x_1} f, \partial_{x_2} f, \dots, \partial_{x_n} f)^T$ .

1. Donner l'unique solution de cette équation de transport dans la classe  $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  en fonction de  $f^0$ .
2. Montrer que  $f \geq 0$  et que l'intégrale de  $f$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  est conservée, i.e. :

$$\int \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(t, x, v) dx dv = \int \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f^0(x, v) dx dv, \quad \forall t \geq 0.$$

3. On note  $\rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t, x, v) dv$ . Montrer que

$$\forall t > 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \rho(t, x) \leq \frac{C_0}{t^n}$$

et que  $C_0 = \int_z \sup_w f^0(z, w) dz$  convient.

4. Qu'est-ce que cela signifie qualitativement sur la solution ?

**Exercice 5.** On considère l'équation des ondes (à vitesse  $c$ ) :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(0, x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2)$$

où  $f$  et  $g$  sont respectivement  $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $c \in \mathbb{R}$ . Démontrer que le problème (2) possède une unique solution  $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  donnée par

$$u(t, x) = U_1(x - ct) + U_2(x + ct),$$

où

$$U_1(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy, \quad U_2(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(y) dy.$$

**Exercice 6.** On considère le problème

$$\begin{cases} \partial_t u - 7 \partial_x u = 0, & t \geq 0, x \leq 0, \\ u(0, x) = x + x^3, & x \leq 0, \\ u(t, 0) = 7t, & t \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Trouver une solution  $u(t, x)$  de (3) qui est de classe  $C^1$ . Que vaut  $u(5, -3)$  et  $u(1, -10)$  ?

**Exercice 7.** Soit  $g \in C^1(\mathbb{R}^+; \mathbb{R})$ . Trouver une solution de classe  $C^1$  du problème suivant :

$$\begin{cases} x \partial_y u - y \partial_x u = u, & x \geq 0, y \geq 0, \\ u(x, 0) = g(x). \end{cases}$$

**Exercice 8.** Pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ , on note

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}, \quad \partial B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| = r\}.$$

Démontrer que pour  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , on a l'égalité

$$\frac{d}{dr} \left( \int_{B(x, r)} f(y) dy \right) = \int_{\partial B(x, r)} f(y) dS(y).$$

**Exercice 9.** Soit  $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Démontrer que

$$u(t, x) = \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} g(x + ty) dS(y), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3$$

est une solution de

$$(\partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2)u = 0, \quad u(0, x) = 0, \quad \partial_t u(0, x) = g(x).$$

**Exercice 10.** Soit  $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$  et  $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ . Démontrer que

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} f(x + ty) dS(y) \right) + \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} g(x + ty) dS(y), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3$$

est une solution de

$$(\partial_t^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2)u = 0, \quad u(0, x) = f(x), \quad \partial_t u(0, x) = g(x).$$

Démontrer que si  $f$  et  $g$  sont à support dans  $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$ ,  $R > 0$  alors  $u(t, x)$  est à support dans

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : t - R \leq |x| < t + R\}, \quad t \geq 0.$$

En déduire que si  $f$  et  $g$  sont à support compact alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^3$ , il existe  $t_0$  tel que  $u(t, x) = 0$  pour  $t \geq t_0$ .

**Exercice 11.** Soit  $u \in C^2([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ ,  $T > 0$  une solution de

$$(\partial_t^2 - \Delta)u = 0, \tag{4}$$

où  $\Delta$  est l'opérateur de Laplace sur  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t_0 \in ]0, T]$ . Supposons que

$$u(0, x) = \partial_t u(0, x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } |x - x_0| \leq t_0.$$

Démontrer que  $u(t, x) = 0$  pour  $t, x$  tels que

$$0 \leq t \leq t_0, \quad |x - x_0| \leq t_0 - t.$$

En déduire que si  $u \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$  est une solution de (4) telle que  $u(0, x)$  et  $\partial_t u(0, x)$  sont à support dans  $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$ ,  $R > 0$  alors  $u(t, x)$  est à support dans

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < t + R\}, \quad t \geq 0.$$

**Exercice 12.** Pour  $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$  on pose

$$u(t, x) = \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} g(x + ty) dS(y), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^3.$$

Démontrer qu'il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $g$  satisfaisant

$$g \in L^1(\mathbb{R}^3), \quad \nabla g \in L^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$$

on a l'inégalité

$$|u(t, x)| \leq \frac{C}{1+t} (\|g\|_{L^1} + \|\nabla g\|_{L^1}), \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

**Exercice 13.** Démontrer que pour tout  $R > 0$  il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$  à support dans  $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < R\}$ , on a l'inégalité

$$\left| \frac{t}{4\pi} \int_{|y|=1} g(x + ty) dS(y) \right| \leq \frac{C}{1+t} \sup_{|y| \leq R} |g(y)|, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^3.$$