TD2 : Lois de conservation scalaire

Exercice 1 (*Rankine-Hugoniot*). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strictement convexe. On s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u^- \mathbb{1}_{x<0} + u^+ \mathbb{1}_{x>0}, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{C}$$

où $u^- > u^+ \in \mathbb{R}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons :

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},\ U(t,x) = \begin{cases} u^- & \text{si } x < \lambda t \\ u^+ & \text{si } x > \lambda t \end{cases}.$$

   Montrer que si U est solution faible de (C), alors on a :

$$\lambda(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-). \tag{Rankine-Hugoniot}$$

2. En déduire une solution faible de (C).

Exercice 2 (*Non-unicité des solutions faibles*). On considère l'équation de Burgers partant de 0 :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{B$_0$}$$

Pour $\alpha > 0$ on définit

$$u_\alpha : (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \mapsto -2\alpha \mathbb{1}_{\{-\alpha t < x < 0\}} + 2\alpha \mathbb{1}_{\{0 \leq x < \alpha t\}}.$$

Montrer que pour chaque $\alpha > 0$, u_α est une solution faible non-triviale de (B$_0$).

Exercice 3 (*Burgers avec un choc*). On considère l'équation de Burgers suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2}\right) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{B}$$

munie de la condition initiale suivante :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \frac{x}{\alpha} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \alpha \\ 0 & \text{si } x \geqslant \alpha \end{cases}$$

avec $\alpha > 0$.

1. Décrire les caractéristiques pour l'équation de Burgers.
2. Déterminer l'unique solution continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux **locale** de (B). *On pourra calculer son temps maximal d'existence T^* en premier lieu.*

3. Donner une solution faible **globale** qui prolonge la solution donnée ci-dessus.

Exercice 4 (*Solutions faibles et limites de solutions classiques*). On reconsidère le système (B). Ici u_0 est la fonction donnée par :

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

1. Décrire les caractéristiques pour l'équation de Burgers.
2. Quel problème remarque-t-on ? À votre avis, y a-t-il unicité de la solution faible pour la condition initiale u_0 ?
3. Montrer que $u(t,x) = u_0(x)$ est une solution faible de (B).
4. Pour $\varepsilon > 0$, déterminer la solution classique u^ε de l'équation de Burgers avec la condition initiale :
$$u_0^\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -\varepsilon \\ \dfrac{x}{\varepsilon} & \text{si } -\varepsilon \leqslant x \leqslant \varepsilon \\ 1 & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$
5. Déterminer $\tilde{u} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} u^\varepsilon$.
6. Est-ce que $\tilde{u}$ est une solution faible de (B) ?

Exercice 5 (Onde de détente). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ strictement convexe. On s'intéresse au problème :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x \left(f(u) \right) &= 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= \mathbb{1}_{x>0}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{D}$$

On va chercher une solution faible $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_\star^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ sous la forme $u(x,t) = v(x/t)$.

1. Montrer qu'en dehors des points critiques de v, on a :
$$f'(u(t,x)) = \frac{x}{t}. \tag{1}$$
2. En déduire une solution de (D).