

FEUILLE D'EXERCICE 3

Exercice 1. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} e^{-\varepsilon|x|^2} dx = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\xi|^2}{4\varepsilon}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

où pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

Exercice 2. Soit $1 \leq p < r < q \leq \infty$. Démontrer que

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\theta \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\theta}$$

où

$$\theta = \frac{p(q-r)}{r(q-p)}.$$

Exercice 3. Soit $p \in [1, \infty]$. Démontrer que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \right|,$$

où

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Exercice 4. Soit $p, q, r \geq 1$ tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2.$$

Démontrer que pour $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$ l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)h(x-y)dx dy$$

est absolument convergente et qu'il existe $C > 0$ tel que tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)h(x-y)dx dy \right| \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

Exercice 5 (inégalité d'Young). Soit $p, q, r \geq 1$ tels que

$$1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}.$$

Démontrer que pour $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

et qu'il existe $C > 0$ tel que tout $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}.$$

Exercice 6 (lemme de Schur). Soit $K: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable telle que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| dy \leq \Lambda, \quad \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |K(x, y)| dx \leq \Lambda.$$

Pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y)dy.$$

Démontrer que pour $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|Tf\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \Lambda \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (1)$$

En déduire que T admet une unique extension à $L^p(\mathbb{R}^n)$ qui satisfait (1).

Exercice 7. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $t > 0$, on pose

$$(Tf)(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)dy.$$

1. Démontrer que T est bien défini.
2. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Démontrer que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\|T(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Exercice 8. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et $t > 0$, on pose

$$(Tf)(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y)dy.$$

1. Démontrer que $(Tf)(t, x)$ est de classe $C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R})$. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Démontrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et $t > 0$,

$$\|\partial_x T(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

et

$$\|\partial_x^2 T(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C t^{-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Exercice 9. Pour $\alpha > 0$, on considère la fonction $g_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que $g_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2. Démontrer qu'il existe $\theta > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|g^{(k)}(t)| \leq \frac{k!}{(\theta t)^k} e^{-\frac{1}{2} t^{-\alpha}}.$$

3. Supposons de plus que $\alpha > 1$. Démontrer que la série

$$u_\alpha(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2$$

converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R}^2$. Démontrer que

$$|u_\alpha(t, x)| \leq v_\alpha(t, x),$$

où

$$v_\alpha(t, x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{t} \left(\frac{x^2}{\theta} - \frac{1}{2} t^{1-\alpha} \right)} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

En déduire que $u_\alpha(0, x) = 0$.

4. Démontrer que $u_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ et que

$$\partial_t u_\alpha(t, x) - \partial_x^2 u_\alpha(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

avec

$$u_\alpha(0, x) = 0,$$

i.e. l'équation de la chaleur admet une infinité de solutions de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ avec condition initiale 0.

5. Démontrer que pour tout $\delta > 0$ il existe des constantes $M \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ et une solution u de classe $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ de

$$\partial_t u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = 0$$

qui n'est pas identiquement 0 et qui satisfait

$$|u(t, x)| \leq A e^{M|x|^{2+\delta}}, \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Remarque. On peut démontrer que l'unique solution de

$$\partial_t u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad u(0, x) = 0$$

qui satisfait

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}, \forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, |u(t, x)| \leq A e^{M|x|^2}$$

est $u \equiv 0$.