

FEUILLE D'EXERCICE 5 : ÉQUATION DE LA CHALEUR

**EXERCICE 1.** On note  $g_t$  le noyau de la chaleur, défini par :

$$\forall t > 0, x \in \mathbb{R}^d, g_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Pour une donnée initiale  $f \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$ , on pose  $u(x, t) := (f \star g_t)(x)$ .

1. Montrer que  $u$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^d \times ]0, +\infty[$  et vérifie

$$\forall t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t)$$

d'une part, et d'autre part

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, u(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f(x)$$

2. Pour  $d = 1$ , montrer que pour  $p \in [1, +\infty]$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute fonction  $f \in L^1 \cap L^\infty$  et  $t > 0$

$$\|\partial_x u(t, \cdot)\|_{L^p} \leq C t^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p}$$

et

$$\|\partial_{xx}^2 u(t, \cdot)\|_{L^p} \leq C t^{-1} \|f\|_{L^p}.$$

**EXERCICE 2** (Semi-groupe de la chaleur). Avec les notations précédentes, pour  $f \in C_b^0(\mathbb{R}^d)$  et  $t > 0$ , on définit

$$S_t f : \begin{cases} \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (f \star g_t)(x) \end{cases}$$

et on pose  $S_0 f = f$ .

Montrer que :

1. si  $f \geq 0$  alors  $S_t f \geq 0$  pour tout  $t \geq 0$
2. pour  $s, t \geq 0$ ,  $S_{t+s} = S_t \circ S_s$  (propriété de semi-groupe).

**EXERCICE 3** (Inégalité de concentration gaussienne). On garde toujours les notations précédentes et on fixe  $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$  telle que  $f$  et  $\nabla f$  soient bornées, précisément  $\|\nabla f\|_\infty \leq L$  pour une constante  $L > 0$ .

1. On fixe  $t \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}^d$  et on définit

$$\text{Pour } 0 \leq s \leq t, \phi(s) := S_s \left( e^{S_{t-s} f} \right) (x)$$

Montrer que

$$\phi'(s) = S_s \left( |\nabla F|^2 e^F \right), \quad 0 < s < t$$

où  $F(x, s) := S_{t-s} f(x)$ .

En déduire que

$$S_t(e^f)(x) \leq e^{S_t f(x) + L^2 t}$$

2. On note  $\gamma$  la mesure gaussienne standard sur  $\mathbb{R}^d$ . Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^f d\gamma \leq e^{\int_{\mathbb{R}^d} f d\gamma + \frac{L^2}{2}}$$

3. Montrer qu'on a égalité si  $f(x) = a \cdot x$  avec  $|a| = L$ .

4. Montrer que pour toute fonction  $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$  1-lipschitzienne, on a

$$\forall r > 0, \gamma \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \geq r + \int_{\mathbb{R}^d} f d\gamma \right\} \leq e^{-\frac{r^2}{2}}$$

**EXERCICE 4** (Inégalité de Hölder par la chaleur). On va montrer l'inégalité de Hölder en utilisant l'équation de la chaleur : pour  $\theta \in [0, 1]$  et  $f, g$  mesurables positives :

$$(L) : \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^\theta g(x)^{1-\theta} dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \right)^\theta \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx \right)^{1-\theta}$$

$$(G) : \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^\theta g(x)^{1-\theta} d\gamma(x) \leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\gamma(x) \right)^\theta \left( \int_{\mathbb{R}^d} g(x) d\gamma(x) \right)^{1-\theta}$$

On se place ici dans le cas  $f, g \in C_b^0 \cap L^1$  pour limiter les calculs.

1. Soit  $t \geq 0$  et  $x \in \mathbb{R}^d$  fixés, pour  $0 \leq s \leq t$  on pose

$$\phi(s) := S_s \left[ (S_{t-s}f)^\theta (S_{t-s}g)^{1-\theta} \right] (x)$$

et

$$F := \ln S_{t-s}f, \quad G := \ln S_{t-s}g, \quad K := \theta F + (1-\theta)G$$

de sorte que  $\phi(s) = S_s(e^K)(x)$ .

Montrer que

$$\phi'(s) = S_s \left[ e^K (|\nabla K|^2 - \theta|\nabla F|^2 - (1-\theta)|\nabla G|^2) \right] (x) \leq 0$$

2. En déduire (G).

3. En déduire (L).