

## TD6 : ESPACES DE SOBOLEV ET UN PEU D'ELLIPTIQUE

**EXERCICE 1.** Suites régularisantes

1. Construire une suite de fonctions
- $(\theta_n)_n$
- vérifiant :

$$\theta_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d), \text{ supp}(\theta_n) \subset \mathbf{B}(0, 1/n), \int_{\mathbb{R}^d} \theta_n = 1, \theta_n \geq 0$$

On notera dans la suite  $u_n := u \star \theta_n$  pour une fonction  $u$  donnée.

2. Soit  $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ , montrer que  $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$  et que  $(u_n)$  converge uniformément vers  $u$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^d$ .
3. Soit  $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$  pour  $1 \leq p < +\infty$ , montrer que  $u_n \in L^p \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$  et que  $(u_n)$  converge vers  $u$  dans  $L^p$ .
4. Soit  $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\theta_n(x)dx = u(0)$  (autrement dit,  $\theta_n \rightarrow \delta_0$  au sens des distributions).
5. Soit  $u \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}^d)$  uniformément continue, montrer que  $(u_n)$  converge vers  $u$  uniformément sur  $\mathbb{R}^d$ .

**EXERCICE 2.** Etude de  $W^{1,p}(0,1)$ 

- 1.
- Caractérisation de  $W^{1,p}$*

(a) Pour  $p \geq 1$ , on considère l'espace  $W^{1,p}(0,1)$  défini de la façon suivante

$$u \in W^{1,p}(0,1) \text{ ssi } u \in L^p(0,1) \text{ et } \exists v \in L^p(0,1), \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[), \int_0^1 u\varphi' = - \int_0^1 v\varphi.$$

Justifier qu'étant donnée  $u \in W^{1,p}(0,1)$ , un tel  $v$  est unique dans  $L^p(0,1)$ , on notera  $v = u'$ .

(b) Montrer que la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,1)} = \|u\|_{L^p(0,1)} + \|u'\|_{L^p(0,1)}$$

munit  $W^{1,p}(0,1)$  d'une structure d'espace de Banach.

(c) Justifier que pour toute fonction  $u \in W^{1,p}(0,1)$ , il existe un représentant continu  $\bar{u} \in \mathcal{C}^0([0,1])$  vérifiant

- i.  $u(x) = \bar{u}(x)$  p.p.  $x \in (0,1)$ ,
- ii. il existe une constante  $c > 0$  ne dépendant pas de  $u$  telle que

$$\forall x \in [0,1] \quad |\bar{u}(x)| \leq c\|u\|_{W^{1,p}},$$

iii. pour  $x, y \in [0,1]$

$$\bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt,$$

iv. si de plus  $p > 1$  alors pour  $x, y \in [0, 1]$

$$|\bar{u}(x) - \bar{u}(y)| \leq \|u'\|_{L^p} |x - y|^{\frac{1}{q}}$$

où  $q < +\infty$  est l'exposant conjugué de  $p$ .

2. *Caractérisation de  $W_0^{1,p}$*

(a) On note  $W_0^{1,p}(0, 1) = \overline{\mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[)}$  où l'adhérence est prise par rapport à la norme  $W^{1,p}$ . On pose également  $W_0 = \{u \in W^{1,p}(0, 1); u(0) = u(1) = 0\}$  ( $u(0)$  et  $u(1)$  sont bien définis, puisque  $u$  est identifiée à son représentant continu). Montrer que, pour  $p \neq \infty$ , on a  $W_0^{1,p}(0, 1) \subset W_0$ .

(b) Soit  $u \in W_0$  et  $p \neq \infty$ . Montrer qu'il existe  $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[)$  vérifiant  $\int_0^1 \varphi_n(x) dx = 0$  tel que l'on ait  $\varphi_n \rightarrow u'$  dans  $L^p(0, 1)$ . En déduire que  $W_0^{1,p}(0, 1) = W_0$ .

3. *Formule de Green et application*

(a) Montrer que  $W^{1,p}(0, 1) = W_0^{1,p}(0, 1) \oplus \mathbb{P}_1$ . En déduire que  $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$  est dense dans  $W^{1,p}(0, 1)$  (où on note  $\mathbb{P}_1$  l'espace des fonctions affines).

(b) Soit  $u$  et  $v \in W^{1,1}(a, b)$ , montrer que  $uv \in W^{1,1}(a, b)$ ,  $(uv)' = u'v + uv'$  et que

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(x) v'(x) dx$$

Si de plus  $u \in W^{1,p}(a, b)$  et  $v \in W^{1,q}(a, b)$ ,  $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ , en déduire que  $uv \in W^{1,p}(a, b)$ .

(c) Soit  $a < b < c$ . Pour  $u \in L^p(a, c)$ , on note  $u_g = u|_{(a,b)}$  et  $u_d = u|_{(b,c)}$ . Montrer que

$$u \in W^{1,p}(a, c) \iff \begin{cases} u_g \in W^{1,p}(a, b), \\ u_d \in W^{1,p}(b, c), \\ u_g(b) = u_d(b) \end{cases}$$

**EXERCICE 3.** Inégalités de Poincaré, Poincaré-Wirtinger et de Deny-Lions

1. Montrer à l'aide du Théorème d'Ascoli que l'injection  $H^1(0, 1) \rightarrow C[0, 1]$  est une application compacte, où  $H^1(0, 1) = W^{1,2}(0, 1)$ .

2. On veut démontrer par l'absurde qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall u \in H_0^1(0, 1), \quad \|u\|_{L^2} \leq C \|u'\|_{L^2}$$

(a) Vérifier que nier cette inégalité entraîne l'existence d'une suite  $u_n$  de  $H^1(0, 1)$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \|u_n\|_{L^2} = 1, \quad \|u_n'\|_{L^2} < \frac{1}{n}$$

(b) Montrer qu'il existe une fonction  $u \in L^2(0, 1)$  telle que  $\|u\|_{L^2} = 1$  et telle que, après extraction d'une sous-suite (renommée  $u_n$ ), on ait  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2(0, 1)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

(c) Montrer que  $u$  est une fonction constante appartenant à  $H_0^1(0, 1)$  et établir une contradiction.

3. Pour une fonction  $u \in H^1(0, 1)$ , on note sa moyenne

$$\bar{u} = \int_0^1 u(x) dx$$

Montrer par l'absurde qu'il existe  $C > 0$  telle que

$$\forall u \in H^1(0, 1), \quad \|u - \bar{u}\|_{L^2} \leq C \|u'\|_{L^2}$$

4. On note  $\Pi_1$  la projection orthogonale, dans  $H^1(0, 1)$ , sur l'espace  $\mathbb{P}_1$  des fonctions affines. Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall u \in H^2(0, 1), \quad \|u - \Pi_1 u\|_{H^1} \leq C \|u''\|_{L^2}$$

**EXERCICE 4.** Une caractérisation équivalente

1. Soit  $1 \leq p < +\infty$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , montrer que  $C_c^\infty(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$ .
2. Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $u \in L^p(I)$  avec  $1 < p \leq +\infty$ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - (i)  $u \in W^{1,p}(I)$
  - (ii) il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\forall \varphi \in C_c^1(I), \quad \left| \int_I u \varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(I)}$$

- (iii) il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout intervalle ouvert  $w \subset\subset I$  et  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $|h| < d(\omega, I^c)$  on a

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leq C|h|$$

De plus, on peut choisir  $C = \|u'\|_{L^p(I)}$ .

**EXERCICE 5** (Formule de la moyenne).

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  harmonique (i.e.  $\Delta u = 0$ ). Pour  $x \in \Omega$  et  $r$  tel que  $B(x, r) \subset \Omega$ , on définit

$$m(x, r) = \frac{1}{\sigma(\partial B(x, r))} \int_{\partial B(x, r)} u(s) d\sigma(s).$$

où  $\sigma$  est la mesure de Lebesgue sur la sphère.

1. Montrer que  $m(x, r) = u(x)$ . On dit que  $u$  vérifie la *formule de la moyenne*. À quoi cette formule vous fait-elle penser si  $d = 2$ ?

**Indication :** On pourra définir pour  $r$  suffisamment petit  $\varphi(r) = m(x, r)$  et montrer que  $\varphi$  est dérivable de dérivée nulle.

2. Montrer qu'on a une formule analogue pour

$$M(x, r) = \frac{1}{\lambda(B(x, r))} \int_{B(x, r)} u(y) d\lambda(y).$$

où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$ .

3. Comment se comporte  $u$  par rapport à sa moyenne si on a juste  $\Delta u \geq 0$  ?
4. Montrer que la réciproque est vraie, c'est-à-dire que si  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  vérifie la propriété de la moyenne, alors  $u$  est harmonique.

**EXERCICE 6** (Principe du maximum fort).

On suppose  $\Omega$  connexe. Soit  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  harmonique et bornée.

1. Montrer que si  $u$  atteint son maximum en un point intérieur à  $\Omega$ , alors  $u$  est constante. En déduire que  $u$  atteint son maximum au bord de  $\Omega$  si  $\Omega$  est borné.
2. En déduire qu'il y a unicité au problème (avec  $\Omega$  borné) :

$$\text{Trouver } u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \text{ tel que } \begin{cases} -\Delta u = f \text{ sur } \Omega \\ u = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**EXERCICE 7** (Régularité des fonctions harmoniques).

1. Montrer que si  $u \in C^2(\Omega)$  vérifie la propriété de la moyenne, alors  $u$  est de classe  $C^\infty$ .  
**Indication :** On pourra utiliser une régularisation de l'unité  $\rho_\varepsilon$  avec  $\varepsilon$  suffisamment petit.
2. Montrer qu'on a en sus pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \Omega$  et  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset \Omega$  :

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C}{r^{d+k}} \|u\|_{L^1(B(x,r))}$$

avec  $C$  ne dépendant que de  $k$  et de la dimension et  $|\alpha| = k$ . (on peut en fait montrer que  $u$  est analytique).

3. En déduire le théorème de Liouville : si  $u$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^n$  et bornée alors  $u$  est constante.

**EXERCICE 8** (Harnack).

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ . Démontrer que pour tout  $\omega \subset\subset \Omega$  connexe ( $\omega$  relativement compact), il existe une constante  $C_\omega > 0$  telle que pour tout  $u$  fonction harmonique et positive sur  $\Omega$ ,

$$\sup_\omega u \leq C_\omega \inf_\omega u.$$

**EXERCICE 9** (Solution fondamentale du laplacien sur  $\mathbb{R}^2$ ).

$$\text{Soit } T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } x \mapsto \begin{cases} \ln(\|x\|) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que pour  $x \neq 0$ ,  $\Delta T(x) = 0$ .
2. Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Exprimer

$$A_\varepsilon = \int_{\|x\| > \varepsilon} T(x) \Delta \varphi(x)$$

en fonction d'une intégrale sur le contour  $S(0, \varepsilon)$  (P.S. merci de faire un dessin).

3. Que vaut  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon$  ?
4. Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . En déduire qu'une solution de  $\Delta u = f$  est donnée par  $f \star T$ .