Théorème de Banach Alaoglu et minimisation :

Théorème : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. séparable et $(T_n)_n$ suite de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ uniformément bornée (i.e. $\exists M > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, \|T_n\|_{E'} \leq M$)

Alors $\exists \varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ et $T \in E'$ tq $T_{\varphi(n)}(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} T(x)$, $\forall x \in E$

preuve : Soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite dense de E (séparabilité), on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $(T_n(x_k))_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{B}(0, M\|x_k\|_E)$.

$k=0$: $(T_n(x_0))_n$ est bornée donc admet une sous suite cvg $(T_{\varphi_0(n)}(x_0))_n$ (B.W.)

$k=1$: $(T_{\varphi_0(n)}(x_1))_n$ ———————————— $(T_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)}(x_1))_n$ (B.W.)

.. En posant par récurrence $\psi_k = \varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_k$, on a $(T_{\psi_k(n)}(x_k))_n$ cvg

En posant $\varphi : n \in \mathbb{N} \mapsto \psi_n(n)$, φ est bien une extractrice et $(T_{\varphi(n)}(x_k))_n$ cvg $\forall k \in \mathbb{N}$, (C'est l'extraction diagonale). On note $\underline{T(x_k)}$ la limite.

Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ tq $\|x - x_k\| < \varepsilon$ (ok par densité)

Alors $(T_{\varphi(n)}(x_k))_n$ est cvg, donc de Cauchy, donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall p, q \geq N$,

$|T_{\varphi(p)}(x_k) - T_{\varphi(q)}(x_k)| \leq M\varepsilon$.

Et donc $|T_{\varphi(p)}(x) - T_{\varphi(q)}(x)| \leq |T_{\varphi(p)}(x) - T_{\varphi(p)}(x_k)| + |T_{\varphi(p)}(x_k) - T_{\varphi(q)}(x_k)| + |T_{\varphi(q)}(x_k) - T_{\varphi(q)}(x)|$

$\leq M\varepsilon + M\varepsilon + M\varepsilon$

donc $(T_{\varphi(n)}(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc cvg. On note $\underline{T(x)}$ sa limite

. T est clairement linéaire comme limite simple de formes linéaires

de plus, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|T_n\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})} \leq M$, on a

$\forall x \in E$, $|T(x)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_{\varphi(n)}(x)| \leq \|x\| \cdot M$ $\to$ $\underline{T \in E'}$

Corollaire : Soit H espace de Hilbert séparable et $(x_n)_n \in H^{\mathbb{N}}$ bornée. Alors

$\exists \varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ tq $x_{\varphi(n)} \rightharpoonup x \in H$

preuve : Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n : y \in H \mapsto \langle x_n, y \rangle$, $T_n \in H'$ et $\|T_n\|_{H'} = \|x_n\|_H$

$\to$ en appliquant Banach-Alaoglu à la suite $(T_n)_n$ on obtient φ et $T \in H'$

tq $T_{\varphi(n)}(y) \longrightarrow T(y)$, $\forall y \in H$. i.e. $\forall y \in H$, $\langle x_n, y \rangle_H \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} T(y)$

Or $T \in H'$, donc par Riesz, $\exists! x \in H$ tq $\forall y \in H$, $T(y) = \langle x, y \rangle$

et alors $\langle x_n, y \rangle_H \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \langle x, y \rangle$ i.e. $\underline{x_n \underset{n \to +\infty}{\overset{H}{\rightharpoonup}} x}$ (il manque l'extractrice ici)

Corollaire: Soit H un Hilbert séparable et $J : H \to \mathbb{R}$ continue, convexe, coercive alors $\exists a \in H$ tq $J(a) = \inf_H J$

preuve: Soit $(x_n)_n \in H$ suite minimisante. Comme J est coercive, cette suite est bornée (car sinon $\inf_H J = +\infty$ ...). On peut appliquer Banach Alaoglu et ainsi obtenir $a \in H$ tq $x_n \rightharpoonup a \in H$. Reste à vérifier que $J(a) = \inf_H J$.
(à extraction près)

. Soit $\beta > \inf_H J$, $C_\beta = \{x \in H, J(x) \leq \beta\}$, C_β est convexe car J est convexe, C_β est fermé car J est continue et non vide car $\beta > \inf_H J$.
donc Par le TPSCFNV, on note P_β la projection et à partir d'un certain rang, $x_n \in C_\beta$ donc

$$\langle a - P_\beta(a), x_n - P_\beta(a) \rangle \leq 0$$

$$= \langle a, x_n \rangle - \langle P_\beta(a), x_n \rangle - \langle a, P_\beta(a) \rangle + \|P_\beta(a)\|^2 \leq 0$$

$$\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \|a\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle a, P_\beta(a) \rangle) + \|P_\beta(a)\|^2 \leq 0$$ (toujours en ayant extrait)

et donc $\|a - P_\beta(a)\|^2 = 0$: $a \in C_\beta \to J(a) \leq \beta$

Ceci étant vrai $\forall \beta > \inf_H J$, on a bien

$\underline{J(a) = \inf_H J}$.

<u>Rmq:</u> Les corollaires sont valables sans hypothèse de séparabilité:
Soit $V = \overline{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(x_n, n \in \mathbb{N})}$, V est fermé dans H donc est lui-même un Hilbert. De plus, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(x_n, n \in \mathbb{N})$ (resp $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}}(x_n, n \in \mathbb{N})$) est dense dans V si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Alors par Banach Alaoglu, $\exists \varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ et $x \in V$ tq $x_{\varphi(n)} \rightharpoonup x$ <u>dans V</u>.
Soit $y \in H$, comme V est fermé, $y = y_V + y_{V^\perp}$ de façon unique avec $y_V \in V$, $y_{V^\perp} \in V^\perp$

et $\langle x_{\varphi(n)}, y \rangle_H = \langle x_{\varphi(n)}, y_V \rangle_V \longrightarrow \langle x, y_V \rangle_V = \langle x, y \rangle_H$.

donc en fait $x_{\varphi(n)} \rightharpoonup x$ <u>dans H</u>

<u>Rmq:</u> • Extraction <u>diagonale</u>