• Connexité de l'ensemble des valeurs d'adhérence et méthode de Jacobi

Théorème: Soit (X,d) espace métrique compact et $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ tq $d(x_{n+1},x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$ est un connexe de X

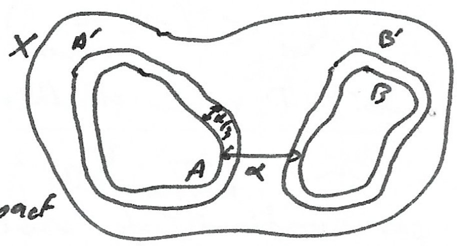
Preuve: Soit Γ l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_n$. Par définition, si $\alpha\in\Gamma$ et $N\in\mathbb{N}$ quelconque, $\alpha \in \overline{\{x_n, n\geq N\}}$, donc $\Gamma \subset \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{x_n,n\geq N\}}$
Réciproquement, si $\alpha\in\bigcap_{N\in\mathbb{N}}\overline{\{x_n,n\geq N\}}$, tout voisinage de α contient une infinité de x_n donc α est valeur d'adhérence : $\Gamma = \bigcap_{N\geq 0}\overline{\{x_n,n\geq N\}}$

On a directement que Γ est fermé dans X, donc Γ est compact.

Si Γ n'est pas connexe: $\Gamma = A \cup B$ avec A et B fermés non vides disjoints.
En particulier A et B sont compacts disjoints et donc $\alpha = d(A,B) > 0$

Soient $A' := \{x\in X, d(x,A)<\alpha/3\} = \bigcup_{x\in A} B(x,\alpha/3)$

$B' := \{x\in X, d(x,B)<\alpha/3\} = \bigcup_{x\in B} B(x,\alpha/3)$



ouverts, et $K := X\setminus(A'\cup B')$ est fermé dans X donc compact

Montrons que $(x_n)_n$ admet une v.a. dans K,

Comme $d(x_{n+1},x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\exists N_0\in\mathbb{N}, \forall n\geq N_0, d(x_{n+1},x_n)<\alpha/3$

Soit $N \geq N_0$ et $x_0\in A$, donc $\exists n_1 > N$ tq $d(x_0,x_{n_1})<\alpha/3$: $x_{n_1}\in A'$

Si $y_0 \in B$, $\exists n_2>n_1$ tq $d(y_0,x_{n_2})<\alpha/3$: $x_{n_2}\in B'$

Soit alors $n_0 = \inf\{n\geq n_1, x_n\notin A'\}$ (bien défini car $n_2>n_1$)

On a $x_{n_0-1}\in A'$ et $d(x_{n_0},B)\geq d(x_{n_0-1},B) - d(x_{n_0},x_{n_0-1})$

$\geq d(A,B) - d(x_{n_0-1},A) - d(x_{n_0},x_{n_0-1})$

$> \alpha/3$

donc $x_{n_0}\notin B'$ et comme $x_{n_0}\notin A'$, $x_{n_0}\in K$

↳ pour tout $N\geq N_0$, $\exists n_0 \geq N$ tq $x_{n_0}\in K$. On peut donc construire une extractrice φ tq $(x_{\varphi(n)})_n \in K^{\mathbb{N}}$ et par compacité de K, cette suite admet une valeur d'adhérence dans K : $\Gamma\cap K \neq \emptyset$: absurde.

Donc Γ est connexe

Corollaire: Si $(x_n)_n$ admet un nombre fini de valeurs d'adhérence, $(x_n)_n$ cvg.

Preuve: si $\Gamma = \{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ alors $\Gamma = \{\lambda_1\}\cup\dots\cup\{\lambda_p\}$: fermés disjoints non vides donc $\lambda_1=\dots=\lambda_p$ et $(x_n)_n$ suite dans un espace compact
Donc $(x_n)_n$ cvg

Théorème: Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $sp(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$. On définit la suite A_k par

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k \end{cases} \quad \text{où} \quad \Omega_k = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\theta & & \sin\theta & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & -\sin\theta & & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\quad \uparrow p & \qquad \uparrow q \qquad\quad \end{matrix} \end{array}$$

- p,q choisis tq $|a_{pq}^{(k)}| = \max_{i\neq j} |a_{ij}^{(k)}|$
- $\theta \in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\}$ tq $\cotan(2\theta) = \frac{a_{qq}-a_{pp}}{2a_{p,q}}$

Alors $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n$ tq $A_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{Diag}(\lambda_{\sigma(i)}, 1\le i\le n)$.

Preuve: on pose $A_k = (a_{i,j}^{(k)})_{i,j} = D_k + B_k$ avec $D_k = \mathrm{diag}(a_{i,i}^{(k)}, 1\le i\le n)$

- $\lim_{k\to+\infty} B_k = 0$: soit $\varepsilon_k = \sum_{i\neq j}|a_{i,j}^{(k)}|^2 = \|B_k\|_2^2$ alors par construction :

$$\begin{pmatrix} a_{pp}^{(k+1)} & a_{pq}^{(k+1)} \\ a_{qp}^{(k+1)} & a_{qq}^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{pp}^{(k)} & a_{pq}^{(k)} \\ a_{qp}^{(k)} & a_{qq}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et donc $a_{qp}^{(k+1)} = a_{pq}^{(k+1)} = a_{pq}^{(k)}\cos(2\theta) + \frac{a_{pp}^{(k)}-a_{qq}^{(k)}}{2}\sin(2\theta) = 0$

Alors $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - 2|a_{pq}^{(k)}|^2$ et d'autre part $\varepsilon_k \le n(n-1)|a_{pq}^{(k)}|^2$

$\to \varepsilon_{k+1} \le \left(1-\frac{2}{n(n-1)}\right)\varepsilon_k$: $\boxed{\varepsilon_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0}$

- Soit D valeur d'adhérence de (D_k) :

On a $\lim_{k\to+\infty} D_{\varphi(k)} = \lim_{k\to+\infty} A_{\varphi(k)} = D$ et donc $\det(D-\lambda I_n) = \det(A-\lambda I_n)$, $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ par continuité de det et car $\forall m\in\mathbb{N}$, A_m est semblable à A.

Donc, D étant diagonale, $D = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda\in Sp(D)) = \mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)}, 1\le i\le n)$ pour un certain $\sigma\in\mathfrak{S}_n$.

$\to (D_k)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence

- $\lim_{k\to+\infty} D_{k+1}-D_k = 0$:

On a $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_{ii}^{(k+1)} - a_{ii}^{(k)} = \begin{cases}0 & si\ i\notin\{p,q\}\\ -\tan\theta\, a_{pq}^{(k)} & si\ i=p \\ \tan\theta\, a_{pq}^{(k)} & si\ i=q\end{cases}$ or $|\theta|\le\frac{\pi}{4}$ et $|a_{pq}^{(k)}|\le\|B_k\|_2 \to 0$

donc $\boxed{D_{k+1}-D_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0}$

- La suite (D_k) est bornée : $\|D_k\|_2 \le \|A_k\|_2 = \|A\|_2$

Donc d'après le thm précédent, la suite (D_k) cvg et donc la suite $(A_k)_k$ cvg vers $\begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ pour un certain $\sigma\in\mathfrak{S}_n$