• <u>Théorème de coupure de Steinhaus</u> :

On note Γ_r l'ensemble des $\Gamma = \mathbb{S}^1$ réguliers relativement à la série entière étudiée

<u>Théorème</u> : Soit $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)$ une série entière de rayon de convergence 1, $(X_n)_{n\geq 0}$ iid de loi $\mathcal{U}([0,1])$. Alors Γ est presque sûrement une coupure pour la série $\left(\sum_{n\geq 0} a_n e^{2i\pi X_n} z^n\right)$

- <u>preuve</u> : On veut montrer que $\mathbb{P}(\Gamma_r = \emptyset) = 1$ i.e. $\mathbb{P}(\Gamma_r \neq \emptyset) = 0$.

La stratégie va alors être d'exprimer "$\Gamma_r \neq \emptyset$" comme un évènement asymptotique et d'utiliser un raisonnement type 0-1 de Kolmogorov.

Notons d'abord que comme $\left(\sum a_n z^n\right)$ est de rayon 1, alors la série : $\left(\sum_{n\geq 0} a_n e^{2i\pi X_n} z^n\right)$ définit bien une variable aléatoire $\forall z \in \mathbb{D} = \mathbb{D}(0,1)$ et on note f_ω sa somme : $f_\omega(z) = \sum_{n\geq 0} a_n e^{2i\pi X_n(\omega)} z^n$.

On note pour $z \in \mathbb{D}$, $E(z) := \left\{\omega \in \Omega,\ \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left|\frac{f_\omega^{(n)}(z)}{n!}\right|^{1/n} < \frac{1}{1-|z|}\right\}$

• Alors $\underline{\{\Gamma_r \neq \emptyset\}} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \bigcup_{\theta\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} \underline{E(re^{2i\pi\theta})}$:

<u>En effet</u> : soit $z \in \mathbb{D}$, $\omega \in \Omega$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{f_\omega^{(n)}(z)}{n!} h^n$ a pour rayon de cvg $R_\omega(z) \geq 1-|z|$ et coïncide avec $f_\omega(z+h)$ sur $\mathbb{D}(z, 1-|z|)$. D'après le critère de Hadamard :

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left|\frac{f_\omega^{(n)}(z)}{n!}\right|^{1/n} = \frac{1}{R_\omega(z)}$$

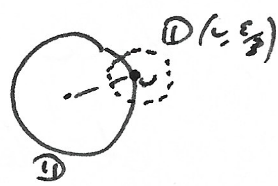
Et si $R_\omega(z) > 1-|z|$, f_ω se prolonge analytiquement sur $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}(z, R_\omega(z))$: $\Gamma_r \neq \emptyset$

Ainsi, $\forall z \in \mathbb{D}$, $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left|\frac{f_\omega^{(n)}(z)}{n!}\right|^{1/n} < \frac{1}{1-|z|} \Rightarrow \Gamma_r(\omega) \neq \emptyset$

: $E(z) \subset \{\Gamma_r \neq \emptyset\}$

. Réciproquement, soit $\omega \in \Omega$ tq $\Gamma_r(\omega) \neq \emptyset$: $\exists u \in \Gamma$ et $\varepsilon > 0$ tq f_ω se prolonge analytiquement sur $\mathbb{D} \cup \mathbb{D}(u, \varepsilon)$. Donc $\exists r \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$ et $\theta \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$ tq $re^{2i\pi\theta} \in \mathbb{D} \cap \mathbb{D}(u, \varepsilon/3)$ de sorte que $\mathbb{D}(re^{2i\pi\theta}, \frac{2\varepsilon}{3}) \subset \mathbb{D}(u, \varepsilon)$ donc

$R_\omega(re^{2i\pi\theta}) \geq \frac{2\varepsilon}{3} > \varepsilon/3 > 1 - |re^{2i\pi\theta}|$



donc $\Gamma_r(\omega) \neq \emptyset \Rightarrow \exists r, \theta \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$, $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left|\frac{f_\omega^{(n)}(z)}{n!}\right|^{1/n} < \frac{1}{1-|z|}$, $z = re^{2i\pi\theta}$

i.e. $\{\Gamma_r \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{r,\theta\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} E(re^{2i\pi\theta})$ d'où l'égalité

• Montrons maintenant que $\mathbb{P}(\Gamma_r \neq \emptyset) \in \{0,1\}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{n+k}{k} a_{n+k} e^{2i\pi X_{n+k}} z^k$ pour $z \in \mathbb{D}$.

Alors $\forall z \in \mathbb{D}$, la variable aléatoire $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ est $\sigma(X_h, h \geq n)$-mesurable comme suite cvg de v.a. $\sigma(X_h, h\geq n)$ mesurables.

Soit $z \in \mathbb{D}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $\sup_{h \geq n} \left|\frac{f^{(h)}(z)}{h!}\right|^{1/h}$ est $\sigma(X_h, h\geq n)$-mesurable

Alors, $\overline{\lim_{n\to+\infty}} \left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right|^{1/n}$ est $\sigma(X_h, h\geq n_0)$-mesurable $\forall n_0 \in \mathbb{N}$ donc est mesurable par rapport à la tribu asymptotique associée aux $(X_n)_n$. Par indépendance, on peut appliquer la loi de Kolmogorov et donc $\forall z \in \mathbb{D}$, $\mathbb{P}(E(z)) \in \{0,1\}$ (comme les unions sont dénombrables on a également que $\{\Gamma_r \neq \emptyset\}$ est un événement, $E(z)$ est lui même un événement car lim de fct° mesurables de Ω).

• Notons que $\mathbb{P}(E(z))$ ne dépend que de $|z|$:

En effet, pour $r \in [0,1[$, $\theta \in [0,1[$, $z = re^{2i\pi\theta}$ on a $\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \sum_{p\geq n}^{+\infty} \binom{p+n}{p} a_{n+p} e^{2i\pi(X_{n+p}+\theta p)} r^p$

et $\left|\frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| = \left|e^{2i\pi\theta n} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}\right| = \left|\sum_{p\geq n}^{+\infty} \binom{p+n}{p} a_{n+p} e^{2i\pi(X_{n+p}+\theta p+\theta n)} r^p\right|$

Soit $\boxed{Y_n := \{X_n + n\theta\}} = X_n + n\theta - \lfloor X_n + n\theta \rfloor$: partie fractionnaire, X_n et Y_n ont même loi et on définit

$$\Psi : \begin{array}{|lll} [0,1]^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ (x_n)_n & \mapsto & \overline{\lim_{n\to+\infty}} \left|\sum_{h\geq n}^{+\infty} \binom{h+n}{h} a_{n+h} e^{2i\pi(x_{n+h})} r^h\right|^{\frac{1}{n}} \end{array} \text{ : mesurable}$$

alors $E(r) = \{\Psi((X_n)_n) < \frac{1}{1-r}\}$ et $E(re^{2i\pi\theta}) = \{\Psi((Y_n)_n) < \frac{1}{1-r}\}$ (car $e^{2i\pi(X_n+n\theta)} = e^{2i\pi Y_n}$)

donc $\mathbb{P}(E(r)) = \mathbb{P}(E(re^{2i\pi\theta}))$ car $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ ont même loi.

• Supposons finalement $\mathbb{P}(\Gamma_r \neq \emptyset) > 0$:

alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{r,\theta\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} E(re^{2i\pi\theta})\right) > 0$: $\exists r_0, \theta_0 \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$ tq $\mathbb{P}(E(r_0e^{2i\pi\theta_0})) > 0$

donc d'après ce qui est juste au dessus: $\forall \theta \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$, $\mathbb{P}(E(r_0e^{2i\pi\theta})) > 0$ donc $= 1$ par Kolmogorov

donc $\mathbb{P}\left(\bigcap_{\theta\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} E(r_0e^{2i\pi\theta})\right) = 1$ car $\cap$ dénombrable.

C'est à dire, presque surement, tous les points de Γ sont réguliers (*) (définition de $E(z)$) : absurde car il existe toujours un point singulier.

donc $\mathbb{P}(\Gamma_r \neq \emptyset) = 0$

et donc Γ est p.s. une coupure pour $\left(\sum_{n\geq 0} a_n e^{2i\pi X_n} z^n\right)$.

(*) Car alors tous les points de $\bigcup_{\theta\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} B(r_0e^{2i\pi\theta}, \ell^{-1})$ sont réguliers avec proba 1 où $\ell < \frac{1}{1-r_0}$ est la limite p.s. de $\Psi((X_n+n\theta)_{n\geq 0})$ (existe d'après 0.1)