Dynamique symbolique : 223, 226

Théorème : Soit $\alpha > 2+\sqrt{5}$, $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha x(1-x)$

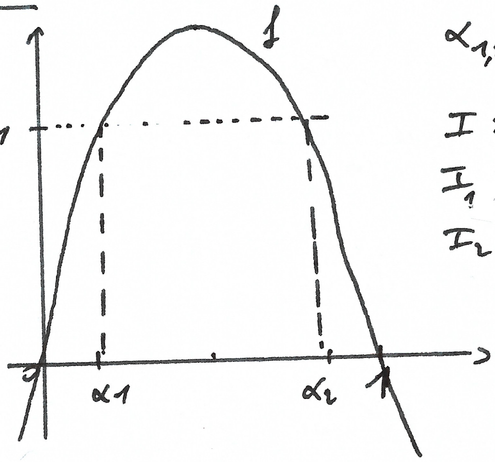
(i) $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, soit $(f^n(x_0))_n \subset [0,1]$, soit $f^n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

(ii) $K := \{x_0 \in \mathbb{R}$ tq $(f^n(x_0))_n$ est bornée$\}$ est un Cantor

(iii) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\exists x \in K$ tq $(f^n(x_0))_n$ soit ultiment p-périodique
et $\tilde{K} := \{x_0 \in \mathbb{R}$ tq $(f^n(x_0))_n$ soit ultiment périodique$\}$ est dénombrable

Rmq: le point (ii) assure l'impossibilité de traitement numérique de la suite $(f^n(x))_n$: dans tout voisinage d'un point de K, il existe des éléments de K et de son complémentaire
↳ haute sensibilité aux erreurs.

Démo:



$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-\frac{4}{\alpha}}}{2}$$

$I = [0,1]$

$I_1 = [0,\alpha_1]$

$I_2 = [\alpha_2,1]$

On a par étude rapide de la fonction :

. $f^{-1}(I) = I_1 \cup I_2$

. $f_{|I_i} : I_i \to I$ est une bijection

. $f : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}_-^*$ est une bijection

. $\forall x \in I_i, |f'(x)| \geq |f'(\alpha_i)| = \alpha\sqrt{1-\frac{4}{\alpha}} > 1$ (concavité)

. $\forall x < 0,\ f(x) < x$.

(i) Si $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $f^N(x) \notin [0,1]$ ($x \in \mathbb{R}$ fixé).
Si $f^N(x) < 0$: alors $(f^n(x))_{n \geq N}$ est strictement décroissante, cvg vers $-\infty$ par continuité de f.
si $f^N(x) > 1$: $f^{N+1}(x) < 0$ et on applique le cas précédent.

(ii) Remarquons que si $J \subset [0,1]$ est un intervalle non vide, $f^{-1}(J) = J_1 \sqcup J_2$
où $J_1 \subset I_1$, $J_2 \subset I_2$ non vides. Et par l'I.A.F. :

$\forall x,y \in J_i$, $|x-y| \leq \max_{I_i} |(f^{-1})'|\, |f(x)-f(y)|$

$|J_i| \leq \frac{1}{\|f'\|_{\infty,I_i}} |J|$ i.e. $|J_i| \leq h|J|$ avec $h = \frac{1}{\alpha\sqrt{1-\frac{4}{\alpha}}}$

Notons que $K \neq \emptyset$ car $0 \in K$, on montre que K est non dénombrable, compact, d'intérieur vide et sans point isolé.
Remarquons que si $x \in K$ et $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) \in I_1 \cup I_2$ car $f^{n+1}(x) \in [0,1]$.

Lemme : $\Phi : \begin{vmatrix} K \longrightarrow \{1,2\}^{\mathbb{N}} \\ x \longmapsto (\xi_n)_{n\geq 0} \end{vmatrix}$ où $\forall n \geq 0$, $\xi_n = 1$ si $f^n(x) \in I_1$, $= 2$ si $f^n(x) \in I_2$

est une bijection.

preuve : Soit $(\alpha_n)_n \in \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ et $a \in I_{\alpha_0}$. On a $[f(a) \in I_{\alpha_1}]$ ssi $[a \in I_{\alpha_0} \cap f^{-1}(I_{\alpha_1})]$,
$[f(a) \in I_{\alpha_1}$ et $f(a) \in I_{\alpha_2}]$ ssi $[a \in I_{\alpha_0} \cap f^{-1}(I_{\alpha_1} \cap f^{-1}(I_{\alpha_2}))]$

Plus généralement, en posant $I_{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n} = I_{\alpha_0} \cap f^{-1}(I_{\alpha_1} \cap f^{-1}(\cdots \cap f^{-1}(I_{\alpha_n})))$ on a ← fermé par continuité de f.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\left[f^k(a)\in I_{\alpha_k} \text{ pour } k\in[\![0,n]\!] \right]$ ssi $\left[a\in I_{\alpha_0,\dots,\alpha_n} \right]$

Donc $\Phi(a)=(\alpha_n)_n$ ssi $\forall n\in\mathbb{N}$, $a\in I_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}$ ssi $a\in \bigcap_{n\geq 0} I_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}$.

Montrons que $\bigcap_{n\geq 0} I_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}$ est un singleton, ce qui assure existence et unicité de l'antécédent.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}$ est fermé et non vide et $|I_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}| \leq k^n |I_{\alpha_0}|$ (récurrence immédiate)

et comme $\alpha > 2+\sqrt{5}$, $k<1$ et donc $|I_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, comme $\left(\bigcap_{i=0}^{n} I_{\alpha_0,\dots,\alpha_i}\right)_n$ est une suite décroissante, on a $\bigcap_{n\geq 0} I_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}$ est un singleton (segments emboîtés)

↳ $\Phi : K \to \{1,2\}^{\mathbb{N}}$ est une bijection. $\left(a = \bigcap_{n\geq 0} I_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}\right)$

. En particulier, K n'est pas dénombrable.

. On pose $K_n = \bigcup_{(\beta_i)_{0\leq i\leq n}\in\{1,2\}^{n+1}} I_{\beta_0,\dots,\beta_n}$, alors $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$ (Φ est une bijection).

[En effet, si $b\in K$, $\Phi(b)=(\beta_n)_n$ alors $\forall n\geq 0$, $b\in I_{\beta_0,\dots,\beta_n} \subset K_n$: $b\in\bigcap_{n\geq 0} K_n$.
Inversement, si $b\in \bigcap_{n\geq 0} K_n$, $\forall n\geq 0$, $\exists (\beta_i)_{0\leq i\leq n}$ tq $b\in I_{\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_n}$ donc $f^n(b)\in I_{\beta_n} \subset I$: $(f^n(b))_n$ bornée ↳ $b\in K$.]

Or K_n est fermé, donc K est fermé, donc compact (borné)

. Soit $x\in K$, on montre que $x\in\overline{K\setminus\{x\}}$. Soit $\varepsilon>0$, $(\gamma_n)_n = \Phi(x)$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $x\in I_{\gamma_0,\dots,\gamma_n}$ et $|I_{\gamma_0,\dots,\gamma_n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $I_{\gamma_0,\dots,\gamma_N} \subset \,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, si $\tilde{\gamma}\in\{1,2\}$ tq $\tilde{\gamma}\neq\gamma_{N+1}$ alors

$\Phi^{-1}(\gamma_0,\dots,\gamma_N,\tilde{\gamma},1,\dots,1,\dots) \in I_{\gamma_0,\dots,\gamma_N}$ et est différent de x.

Donc $]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\, \cap K$ contient un point distinct de x : x est non isolé dans K.

. Soit $h>0$, comme $k^n\to 0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tq $k^{n_0}<2h$ et alors, les composantes connexes de K_{n_0} sont de diamètre $<2h$, donc $]x-h,x+h[$ ne peut pas être inclus dans K_{n_0} donc dans K : $\mathring{K}=\emptyset$.

→ K est un Cantor.

[Remarque : $\forall\varepsilon>0$, $\forall x_0\in K$, on peut trouver dans $]x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon[$ deux éléments y,z distincts de x_0 tq $f^n(y)\to-\infty$ et $z\in K$. Comme $z\neq x_0$, $\exists m\in\mathbb{N}$ tq $[\Phi(z)]_m \neq [\Phi(x_0)]_m$ et donc $f^m(z)$ et $f^m(x_0)$ appartiennent chacun à un I_i différent

↳ $\|(f^n(x_0))_n - (f^n(z))_n\|_{\infty} \geq \alpha_2-\alpha_1$: $\psi : \begin{cases} K \to \ell^\infty(\mathbb{N}) \\ x \mapsto (f^n(x))_n \end{cases}$ pas continue]

(iii) Soit $x\in K$, $p\in\mathbb{N}^*$, si $\Phi(x)=(\gamma_n)_{n\geq 0}$, alors $\Phi(f^k(x)) = (\gamma_n)_{n\geq k}$ donc $(f^n(x))_n$ est ultimement p-périodique ssi $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ l'est.

↳ Φ induit une bijection de $\tilde{K}_p := \{x\in K \text{ tq } (f^n(x))_n \text{ soit ultimement } p\text{-périodique}\}$ sur $\mathcal{P}_p$

$(\mathcal{P}_p := \{(\gamma_n)_n\in\{1,2\}^{\mathbb{N}}, \text{ ultimement } p\text{-périodique}\})$.

→ $\tilde{K}_p\neq\emptyset$, $\forall p\in\mathbb{N}^*$.

De plus, $\mathcal{P} = \bigcup_{p\geq 0}\mathcal{P}_p$ est infini et $\begin{cases} \mathcal{P} \to \mathbb{Q} \\ (\beta_n) \mapsto \overline{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n\cdots}^{10} \end{cases}$ est une injection, donc $\tilde{K}$ est dénombrable.