Equation différentielle dans les espaces de Hölder :

Théorème: Soient $\alpha\in]0,1]$, $a<b\in\mathbb{R}$, $v_a, v_b\in\mathbb{R}$, $q\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a,b[,\mathbb{R}_+)$ et $f\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a,b[)$
alors $\exists!\, v\in\mathcal{C}^{2,\alpha}(]a,b[)$, $\begin{cases} -v''+qv=f \\ v(a)=v_a \text{ et } v(b)=v_b\end{cases}$

Preuve: Notons $M=\sup_{[a,b]}|q|$ et $P=-\frac{d^2}{dx^2}+q$

• Unicité: On montre le lemme suivant:

Lemme: $\exists C(M)>0$ tq $\forall v\in\mathcal{C}^2([a,b])$, $\|v\|_\infty\le|v(a)|+|v(b)|+C\|Pv\|_\infty$

Le lemme implique directement l'unicité car si v est solution homogène à conditions initiales nulles alors $\|v\|_\infty\le|0|+|0|+0=0 \Rightarrow \underline{v\equiv 0}$

démo: Soit $\lambda=\sqrt{M+1}$ et $\forall x\in]a,b[$, $V(x):=|v(a)|+|v(b)|+(e^{\lambda(b-a)}-e^{\lambda(x-a)})\|Pv\|_\infty$

Alors $V(a)\ge v(a)$, $V(b)\ge v(b)$ et

$$PV=+\lambda^2e^{\lambda(x-a)}\|Pv\|_\infty+q(x)\left(|v(a)|+|v(b)|+(e^{\lambda(b-a)}-e^{\lambda(x-a)})\|Pv\|_\infty\right)$$
$$=(|v(a)|+|v(b)|)q+\|Pv\|_\infty\left(qe^{\lambda(b-a)}+e^{\lambda(x-a)}(\lambda^2-q)\right)$$
$$\ge\underbrace{(\lambda^2-q)e^{\lambda(x-a)}}_{\ge 1}\|Pv\|_\infty\ge\|Pv\|_\infty\ge Pv$$

Or on a $(v-V)''\ge(v-V)q$ avec $(v-V)(a)\le 0$ et $(v-V)(b)\le 0$
et par principe du maximum, $v-V\le 0$ sur $]a,b[$.
Ainsi, $v\le V$ et donc en posant $C=e^{\lambda(b-a)}$, $\|v\|_\infty\le|v(a)|+|v(b)|+C\|Pv\|_\infty$
(où on a répété l'opération pour $-v$).

• Existence: On se ramène au cas $v_a=v_b=0$ en posant $\tilde v(x):=\frac{v_b-v_a}{b-a}(x-a)+v_a$
et $V=v-\tilde v$. Alors v est solution du pb initial ssi V vérifie $\begin{cases}PV=f+q\tilde v=\tilde f\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a,b[)\\ V(a)=V(b)=0\end{cases}$

Soit $t\in[0,1]$, on note $P_t:=-\frac{d^2}{dx^2}+tq$ (P_t envoie bien $\underbrace{\mathcal{C}^{2,\alpha}(]a,b[)}_{\substack{v(a)=v(b)=0\\ =E}}$ sur $\underbrace{\mathcal{C}^{0,\alpha}(]a,b[)}_{=F}$)

et on pose $A=\{t\in[0,1],\ P_t:E\to F$ est bijectif$\}$
$=\{t\in[0,1],\ P_t:E\to F$ est surjectif$\}$ par unicité.

On montre que A est connexe non vide, ce qui montrera que $1\in A$.

• $A\neq\emptyset$: $0\in A$ car si $v(x):=-\int_a^x\int_a^t f(s)\,ds\,dt+C(x-a)$ où $C=\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^t f(s)\,ds\,dt$
alors $P_0v=-\frac{d^2}{dx^2}v=f(x)$.

ouvert

• A est ouvert: on a $A=(t\mapsto P_t)^{-1}(GL(E,F))$ et $t\mapsto P_t$ est continue. en effet, $\forall v\in E$, $|P_t(v)-P_{t_0}(v)|\le|t-t_0|\,\|q\|_\infty|v|$.
et donc $\|P_t(v)-P_{t_0}(v)\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}\le|t-t_0|\,\|q\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}\|v\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}}$
$\Rightarrow\|P_t-P_{t_0}\|_{\mathcal{L}(E,F)}\le|t-t_0|\,\|q\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$

• <u>A est fermé</u> : Soit $(t_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, $t_n \longrightarrow t_0 \in [0,1]$. Montrons que $t_0 \in A$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists !\, u_n \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(]a,b[)$ tq $\begin{cases} -u_n'' + t_n q u_n = f \\ u_n(a) = u_n(b) = 0 \end{cases}$.

En réutilisant la démo de l'unicité, $\|u_n\|_\infty \leq C\|f\|_\infty$

De plus, pour $\varepsilon > 0$, $\exists C' = C(\varepsilon) > 0$ tq $\|u_n'\|_\infty \leq \varepsilon \|u_n\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}} + C'\|u_n\|_\infty$

Alors $\|u_n''\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \leq \|u_n'' - t_n q u_n\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} + t_n \|q u_n\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$

$\leq \|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} + t_n \|q\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \|u_n\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \leq \|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} + \|q\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \|u_n\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$

$\leq \|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} + \|q\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \left(\varepsilon \|u_n\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}} + \underline{\underline{C''\|f\|_\infty}} \right)$

→ En prenant $\varepsilon > 0$ assez petit : $\varepsilon \leq \frac{1}{3}$ et $\varepsilon \|q\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \leq \frac{1}{3}$, on a

$1 - \varepsilon - \varepsilon\|q\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \geq \frac{1}{3}$ et donc

$\|u_n\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}} \leq \varepsilon \|q\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \|u_n\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}} + \varepsilon \|u_n\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}} + C\|f\|_\infty (1 + C' + C''\|q\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}) + \|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$

et en enlevant $\varepsilon\|u_n\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}}$ et $\varepsilon\|q\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}} \|u_n\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}}$, on a

$\frac{1}{3}\|u_n\|_{\mathcal{C}^{2,\alpha}} \leq C\|f\|_\infty (1 + C' + C''\|q\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}) + \|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}}$

→ $(u_n)_n$ est uniformément bornée dans $\mathcal{C}^{2,\alpha}(]a,b[)$

donc $\exists \varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ tq $u_{\varphi(n)} \longrightarrow u$ dans $\mathcal{C}^2(]a,b[)$

On peut donc passer à la limite dans l'équation et alors $\begin{cases} -u'' + t_0 q u = f \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$

Or $q, f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(]a,b[)$ donc $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(]a,b[)$ ($(u_n)_n$ est bornée unif dans $\mathcal{C}^{2,\alpha}$)

→ $t_0 \in A$

Par connexité de $[0,1]$, A est connexe et donc $\underline{\underline{1 \in A}}$

<u>Rmq</u>: • Principe du maximum
• Propriétés des espaces de Hölder