Théorème 0.0.1 :

Soit $u_0 \in C^\infty([0,2\pi];\mathbb{C})$ périodique. On considère l'équation de Schrodinger :

$$\begin{cases} i\partial_t u = \partial_{xx}^2 u & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] \\ u_{|t=0} = u_0 & \text{sur } [0,2\pi] \end{cases} \tag{1}$$

Alors (1) possède une unique solution u dans $C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times (0,2\pi);\mathbb{C})$. De plus,
- $\forall t > 0,\ ||u(t,.)||_{L^2(0,2\pi)} = ||u_0||_{L^2(0,2\pi)}$
- $\forall k \in \mathbb{N},\ u(2k\pi,.) = u_0$
- $u(t,.) \xrightarrow[t\to 0]{CVU} u_0$

Pour l'existence et l'unicité d'une solution, on procède par analyse-synthèse.

Analyse :

Supposons qu'il existe $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi];\mathbb{C})$ solution de (1). On peut développer u en série de fourier dans $L^2(0,2\pi)$: $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)e^{inx}$, avec convergence uniforme. On remarque que les c_n sont C^∞. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\partial_t^k u$ est C^∞ et donc intégrable en espace sur $[0,2\pi]$. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale dans $c_n(t) = (2\pi)^{-1}\int u(t,x)e^{-inx}dx$.

On peut ainsi en déduire les développement en série de Fourier des dérivées de u : $\partial_t u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} ic_n'(t)e^{inx}$ et $\partial_{xx}^2 u(t,x) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 c_n(t)e^{inx}$.

L'équation (1) donne alors la relation $ic_n'(t) = -n^2 c_n(t)$, i.e. $c_n(t) = e^{in^2t}c_n(0)$ (IPP pour ces coeff).

On a donc

$$u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(0)e^{in(x+nt)}$$

En particulier, on peut dominer chaque coefficient (à constante près) par $c_n(0)$. On a $\sum_n |c_n(0)| < +\infty$ ($c_n(u_0) \leq (1/n)^2 + c_n(u_0')^2$ qui est sommable car $u_0' \in L^2$). Donc comme chaque $(x,t) \mapsto c_n(0)e^{in(x+nt)}$ est C^∞, u est C^∞.

Synthèse :

On vient de voir que $u : (t,x) \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(0)e^{in(x+nt)}$ est C^∞. On peut dériver :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi], \quad \partial_t u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} in^2 c_n(0)e^{in(x+nt)} = -i\partial_{xx}^2 u(t,x)$$

Avec $u(0,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(0)e^{inx} = u_0(x)$. Donc u est bien solution de (1).

On vérifie maintenant les derniers points :

$$\forall t > 0, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(t,x)|^2dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(t)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(0)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u_0(x)|^2dx \qquad \text{par Plancherel}$$

$$\forall x \in [0,2\pi],\ \forall k \in \mathbb{N} \quad u(2k\pi,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_n(0)e^{in(x+2kn\pi)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_n(0)e^{inx} = u_0(x)$$

$$||u(t,.) - u_0||_{L^\infty(0,2\pi)} \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(0)\left(1 - e^{in^2t}\right)| \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \quad \text{par convergence dominée}$$