Equation de Schrödinger :

On notera $\mathcal{F}_x$ la transformée de Fourier partielle en x, alors $\mathcal{F}_x$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. $\mathcal{F}_x(f)=\hat{f} : \int_{\mathbb{R}^n} f(t,x)e^{-ix\cdot\xi}dx$

Théorème : L'équation de Schrödinger possède une unique solution élémentaire tempérée dans le futur i.e. $\exists!\, E\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ tq $\begin{cases}(\partial_t - i\Delta_x)E=\delta_{(0,0)}\\ \mathrm{supp}(E)\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\end{cases}$

Preuve :

- Existence : si $E\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ vérifie l'équation, alors en appliquant $\mathcal{F}_x$ on a $\partial_t\hat{E}+i|\xi|^2\hat{E}=\hat{\delta}_{(0,0)}$

où $\langle\hat{\delta}_{(0,0)},\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}=\langle\delta_{(0,0)},\hat{\varphi}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}=\hat{\varphi}(0,0)=\int_{\mathbb{R}}\varphi(0,x)dx$ (i.e. $\mathcal{F}_x\delta_{(0,0)}=\delta_{t=0}\otimes 1_\xi$)

On veut donc prendre pour solution $\hat{E}=\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-it|\xi|^2}\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$

et donc $\underline{E=\mathcal{F}_x^{-1}\left(\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-it|\xi|^2}\right)}$ qui est bien à support dans $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$

(On fait l'abus d'écrire "$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-it|\xi|^2}$" pour la distribution tempérée associée à la fonction mesurable bornée $(t,\xi)\mapsto\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-it|\xi|^2}$)

Vérifions que E est bien solution élémentaire. D'une part, $E\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ car $\mathcal{S}'$ s'envoie sur lui-même via $\mathcal{F}_x$.

D'autre part, $\forall\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $\langle(\partial_t-i\Delta_x)E,\hat{\varphi}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}=\langle(\partial_t+i|\xi|^2)\hat{E},\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$

$$=-\langle\hat{E},(\partial_t-i|\xi|^2)\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

$\rightarrow \langle(\partial_t-i\Delta_x)E,\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}=-\langle\underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-it|\xi|^2}}_{\in L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)},(\partial_t-i|\xi|^2)\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$

$$=-\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-it|\xi|^2}(\partial_t-i|\xi|^2)\varphi(t,\xi)\,dt\,d\xi \quad \text{Fubini car } \varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$$

$$=-\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}_+}\partial_t\left(e^{-it|\xi|^2}\varphi(t,\xi)\right)dt\,d\xi$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(0,\xi)d\xi=\langle\hat{\delta}_{(0,0)},\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}=\langle\delta_{(0,0)},\hat{\varphi}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}$$

Comme $\mathcal{F}_x$ est une bijection, on a bien $(\partial_t-i\Delta_x)E=\delta_{(0,0)}$ au sens des distributions.

- Unicité : Par linéarité, il suffit de montrer que si $G\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ vérifie $(\partial_t-i\Delta_x)G=0$ et $\mathrm{supp}(G)\subset\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$ alors $G=0$.

Soit un tel G, on a $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $\langle (\partial_t - i\Delta_x)G, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = 0$

Alors $\langle (\partial_t + i|\xi|^2)\hat{G}, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$

$\langle \partial_t (e^{+it|\xi|^2}\hat{G}), \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = 0$. $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$

donc $e^{it|\xi|^2}\hat{G}$ est constante dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ par rapport au temps

Cependant, comme $\mathrm{supp}(G) \subset \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$, on a $\mathrm{supp}(\hat{G}) \subset \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n$

et donc en localisant pour $t<0$, on a $\hat{G} = 0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, i.e. $\underline{G = 0}$.

<u>Corollaire:</u> (Expression en variables physiques)

$\partial_t - i\Delta_x$ admet une unique solution élémentaire tempérée dans le futur E qui s'écrit $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $\langle E, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = e^{-i\frac{\pi n}{4}}\int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x|^2}{4t}}\varphi(t,x)\,dx\,dt$

<u>Preuve:</u> D'après ce qui précède, $\hat{E} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-it|\xi|^2}$ et donc par inversion de Fourier, on a dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$: $\underline{\check{E} = \frac{1}{(2\pi)^n}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\,\mathcal{F}_x(e^{-it|\xi|^2})}$

En admettant que $\underline{\mathcal{F}_x(e^{-it|\xi|^2})} = \underline{\sqrt{\frac{\pi}{t}}^{\,n} e^{-in\frac{\pi}{4}} e^{+i\frac{|x|^2}{4t}}}$, pour $t>0$, on a

$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$, $\langle E, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle \check{E}, \check{\varphi}\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \frac{e^{-in\pi/4}}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}_+}\sqrt{\frac{\pi}{t}}^{\,n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x|^2}{4t}}\varphi(t,-x)\,dx\,dt$

$= e^{-i\frac{\pi n}{4}}\int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\frac{|x|^2}{4t}}\varphi(t,x)\,dx\,dt$ qui est la <u>formule voulue</u>.

<u>Preuve du lemme:</u> On ne peut pas écrire directement $\mathcal{F}_x(e^{-it|\xi|^2})$ car $e^{-it|\xi|^2} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

(Soit $t>0$ fixé)

On pose donc $T_\varepsilon = e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-it|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a $T_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par cvg dominée

donc $\mathcal{F}_x T_\varepsilon \to \mathcal{F}_x T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par continuité.

En posant $z_\varepsilon = \varepsilon + it$, on a $T_\varepsilon = e^{-z_\varepsilon|x|^2}$ et donc

$\mathcal{F}_x(T_\varepsilon) = \sqrt{\frac{\pi}{z_\varepsilon}}^{\,n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4z_\varepsilon}}$ où $\sqrt{\cdot}$ est la détermination principale.

Comme $t>0$, $z_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} t e^{i\frac{\pi}{2}}$ et d'autre part, $e^{-\frac{|\xi|^2}{4z_\varepsilon}} \longrightarrow e^{i\frac{|\xi|^2}{4t}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ par cvg dominée.

Donc finalement, $\underline{\mathcal{F}_x T = \sqrt{\frac{\pi}{t}}^{\,n} e^{-in\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{|\xi|^2}{4t}}}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$