Equation de la chaleur :

Théorème : Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,\pi],\mathbb{R})$, $f(0)=f(\pi)=0$. On note K_f l'ensemble des éléments $u : \begin{vmatrix} [0,\pi]\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ (x,t) \mapsto u(x,t) \end{vmatrix} \in \mathcal{C}([0,\pi]\times\mathbb{R}_+)$ vérifiant :

$\partial_t u, \partial_x u$ et $\partial^2_{xx} u$ existent et sont continues sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$

$(*)$: et $\begin{cases} \partial^2_{xx} u = \partial_t u & \text{sur } [0,\pi]\times\mathbb{R}_+^* \\ u_{|x=0} = u_{|x=\pi} = 0, \quad u_{|t=0} = f \end{cases}$

Alors K_f est singleton

Preuve : On raisonne de façon heuristique pour l'existence :

On pose $u : (x,t) \mapsto X(x)T(t)$ où $X \in \mathcal{C}^2([0,\pi],\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, u non nulle

Supposons que u vérifie $\begin{cases} \partial^2_{xx} u = \partial_t u \\ u_{|x=0} = u_{|x=\pi} = 0 \end{cases}$

Alors $\forall (x,t) \in [0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$, $X(x)T'(t) = X''(x)T(t)$. Or u non nulle donc $\exists (x_0,t_0) \in]0,\pi[\times\mathbb{R}_+^*$ tq $u(x_0,t_0) \neq 0$. En particulier $X(x_0) \neq 0$ et $T(t_0) \neq 0$

donc $\forall x \in [0,\pi]$, $X''(x) = \underbrace{\dfrac{T'(t_0)}{T(t_0)}}_{=-k} X(x)$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $T'(t) = \dfrac{X''(x_0)}{X(x_0)} T(t)$, i.e. $k = \dfrac{-X''(x_0)}{X(x_0)}$

On a finalement $\forall (x,t) \in [0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$, $\begin{cases} X''(x) = -k X(x) \\ T'(t) = -k T(t) \end{cases}$

- si $k<0$: $X(x) = Ae^{\sqrt{-k}\,x} + Be^{-\sqrt{-k}\,x} \Rightarrow A=B=0$ d'après les conditions au bord $\hookrightarrow$ absurde
- si $k=0$: X est affine : idem

donc $k>0$ et alors $X''(x) = -kX(x) \to X(x) = \underbrace{A}_{\to 0}\cos(\sqrt{k}\,x) + B\sin(\sqrt{k}\,x)$

et $X(\pi)=0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{k} = n$ i.e. $X(x) = B\sin(nx)$.

et alors en résolvant en t : $\exists C \neq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ tq $\boxed{u(x,t) = C\sin(nx)e^{-n^2 t}}$ $\forall (x,t) \in [0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$

et par continuité de u, valable pour $(x,t) \in [0,\pi]\times\mathbb{R}_+$.

Réciproquement, vérifions qu'une telle fonction $u_n(x,t) := \sin(nx)e^{-n^2 t}$ vérifie bien les conditions demandées.

Soit $\tilde{f} : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in [0,\pi] \\ -f(-x) \text{ si } x \in [-\pi,0] \\ 2\pi \text{ périodique.} \end{cases}$, comme $f(0)=f(\pi)$, $\tilde{f}$ est $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}^1_{pm}(\mathbb{R})$

donc sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$: $\sum_{n \geq 1} c_n(\tilde{f})\, e_n$

Notons $b_n(\tilde{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(t)\sin(nt)\,dt$ (par imparité, ce sont les seuls coeff intéressant).

On pose alors $S = \sum_{n \geq 1} b_n(\tilde{f})\, u_n$

Alors S est bien définie et continue sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+$: en effet comme $\tilde{f}\in\mathcal{C}^0\cap\mathcal{C}^1_{pm}$, $(b_n(\tilde{f}))_{n\geq 1}$ est sommable et de plus $\|b_n(\tilde{f})v_n\|_\infty \leq |b_n(\tilde{f})|$ pour $n\geq 1$

donc S est la somme d'une série normalement cvg de fct° $\mathcal{C}^0$, donc est continue.

On a de plus $S(0,\cdot)=\sum_{n\geq 1} b_n(\tilde{f})\,v_n(0,\cdot) = 0 = S(\pi,\cdot)$

Reste à vérifier la régularité de S:

Soit $\varepsilon>0$: $|\partial_t(b_n(\tilde{f})v_n(x,t))| = |\partial_t(b_n(\tilde{f})\sin(nx)e^{-n^2t})|$
$= |-n^2 b_n(\tilde{f})\sin(nx)e^{-n^2t}| \leq \underbrace{n^2|b_n(\tilde{f})|e^{-n^2\varepsilon}}_{\text{série cvg}}$. $\forall t\geq\varepsilon$

donc $\forall x\in[0,\pi]$, $t\mapsto S(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $]\varepsilon,+\infty[$, i.e. sur $\mathbb{R}_+^*$

et $\partial_t S = -\sum_{n\geq 1} n^2 b_n(\tilde{f})\sin(nx)e^{-n^2t}$

De plus, la majoration étant uniforme en x et chaque fct° étant continue /x, $\partial_t S$ est continue sur $[0,\pi]\times\mathbb{R}_+^*$

On fait le même pour $\partial_x S$ et $\partial^2_{xx} S$. et alors $\boxed{\partial^2_{xx} S = \partial_t S.}$

Enfin, comme $\forall x\in[0,\pi]$, $S(x,0)=\sum_{n\geq 1} b_n(\tilde{f})\sin(nx)$ et que $\tilde{f}\in\mathcal{C}^0\cap\mathcal{C}^1_{pm}$ on a $S(x,0)=f(x)$ par c.v.n.. donc $\underline{S\in K_f}$

Unicité: Soient $v_1,v_2\in K_f$, $v=v_1-v_2$ alors $v\in K_0$.

Soit $H : t\in\mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^\pi v^2(x,t)\,dx$, alors H est continue sur $\mathbb{R}_+$ (car v l'est) et $H\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ car v est $\mathcal{C}^1$ en t sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus

$H'(t) = \int_0^\pi 2v(x,t)\partial_t v(x,t)\,dx = 2\int_0^\pi \partial^2_{xx}v(x,t)\,v(x,t)\,dx$
$= 2[v(x,t)\partial_x v(x,t)]_0^\pi - 2\int_0^\pi(\partial_x v(x,t))^2\,dx$
$= -2\int_0^\pi(\partial_x v(x,t))^2\,dx \leq 0$: $H(0)=0$ et $H\searrow$

donc par continuité de v, on a $\forall(x,t)\in[0,\pi]$, $v(x,t)=0$

$\rightarrow$ $\underline{v_1=v_2}$.