Etude de $O(p,q)$:

$O(p,q)$: sous-groupe de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries pour la forme quadratique $x \in \mathbb{R}^{p+q} \mapsto x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$

Théorème : Si $p,q \neq 0$, $O(p,q) \overset{\text{homéo}}{\simeq} O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$

démo : Posons $n = p+q$ et soit $M \in O(p,q) \subset GL_n(\mathbb{R})$.

On écrit $M = OS$ sa décomposition polaire ($O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$)

et on veut montrer que O et S sont dans $O(p,q)$.

Lemme : $\exp : \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

preuve : • Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $M = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}{}^tP$ par thm spectral, avec $P \in O_n(\mathbb{R})$

alors $\exp(M) = P\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}{}^tP \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on a continuité par restriction de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $B = P\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}{}^tP$ par thm spectral, $\mu_i > 0$ car $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

donc $S = P\begin{pmatrix} \ln \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln \mu_n \end{pmatrix}{}^tP$ convient comme antécédent de B par exp. $\to$ surjectivité

• Soient $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tq $\exp(A) = \exp(A')$, soient $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ les vp de $\exp(A)$

et $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme interpolateur de Lagrange donné par $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$, $\forall i \in [\![1;n]\!]$.

Alors $Q(\exp A') = Q(\exp A) = A$ donc A commute avec A' car A' commute avec $Q(\exp A')$

donc A et A' sont codiago : $A = PDP^{-1}$, $A' = PD'P^{-1}$ et $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1} = P\exp(D')P^{-1}$

$\Rightarrow \exp(D) = \exp(D') \to D = D' \to \underline{A = A'}$

d'où l'injectivité

• Reste à montrer la bicontinuité :

Soit $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} = (\exp(A_p))_{p \in \mathbb{N}}$ tq $B_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} B = \exp(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, mq $A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$.

Comme (B_p) converge, elle est bornée pour $\|\cdot\|_2$. Par continuité de $B \mapsto B^{-1}$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$,

(B_p^{-1}) est également bornée pour $\|\cdot\|_2$, ainsi : $\exists c, c' > 0$ tq $\sup_{p \in \mathbb{N}} \|B_p\|_2 \in [c', c]$

Or on a $\|B\|_2 = \sqrt{\rho({}^tBB)} = \sqrt{\rho(B^2)} = \rho(B) \to \boxed{\bigcup_{p \in \mathbb{N}} Sp(B_p) \subset [c', c].}$

et comme $c, c' > 0$, $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} Sp(A_p) \subset [\ln c', \ln c] \to \underline{(A_p)_p \text{ est bornée pour } \|\cdot\|_2}$.

Soit alors une sous-suite $(A_{p_k})_k$ de $(A_p)_p$ qui cvg vers $\bar{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

Alors $B = \lim_{k \to +\infty} \exp(A_{p_k}) = \exp(\bar{A})$ et par injectivité, $\underline{\bar{A} = A}$

Donc $(A_p)_p$ admet une unique valeur d'adhérence, comme c'est une suite bornée d'un espace de dimension finie, elle converge vers cette v.a. $\boxed{}$

Revenons à la preuve du théorème :

Soit $T = {}^tMM$, on a $S^2 = T$ et $M \in O(p,q) \Leftrightarrow {}^tM I_{p,q} M = I_{p,q} \Leftrightarrow {}^t(M^{-1}) I_{p,q} M^{-1} = I_{p,q}$

$\Leftrightarrow ({}^tM)^{-1} \in O(p,q) \Leftrightarrow {}^tM \in O(p,q)$

donc $T \in O(p,q)$ car $M \in O(p,q)$ et donc $S^2 \in O(p,q)$

Or $T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc $T = \exp(U)$ pour un unique $U \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et alors

$T \in O(p,q) \iff {}^tT I_{p,q} T = I_{p,q}$

$\iff {}^tT = I_{p,q} T^{-1} I_{p,q} \iff \exp({}^tU) = I_{p,q} \exp(-U) I_{p,q}$

$\iff \exp({}^tU) = \exp(-I_{p,q} U I_{p,q})$ (conjugaison par $I_{p,q}$: continuité du produit)

$\iff U = {}^tU = -I_{p,q} U I_{p,q}$ par injectivité

$(\iff U I_{p,q} + I_{p,q} U = 0)$

$\iff \frac{{}^tU}{2} = -I_{p,q} \frac{U}{2} I_{p,q}$

$\iff \exp(\frac{1}{2}{}^tU) = \exp(-I_{p,q} \frac{U}{2} I_{p,q})$

$\iff {}^t\exp(\frac{1}{2}U) = I_{p,q} \exp(\frac{U}{2}) I_{p,q}$

Or $\exp(\frac{U}{2}) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\exp(\frac{U}{2})^2 = \exp(U) = T = S^2$ et par injectivité de $S \mapsto S^2$ dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a $S = \exp(\frac{U}{2})$ et donc ${}^tS = I_{p,q} S I_{p,q}$: $\boxed{S \in O(p,q)}$

et également $\boxed{O \in O(p,q)}$. Donc $M = OS \mapsto (O,S)$ induit un homéo :

$$O(p,q) \simeq (O(p,q) \cap O(n)) \times (O(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$$

• Soit $O \in O(p,q) \cap O(n)$, $O = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ($\updownarrow p$, $\updownarrow q$), alors

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA & -{}^tC \\ {}^tB & -{}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tAA - {}^tCC & {}^tAB - {}^tCD \\ {}^tBA - {}^tDC & {}^tBB - {}^tDD \end{pmatrix}$$

$\to \begin{cases} {}^tAA - {}^tCC = I_p \\ {}^tAB - {}^tCD = 0 \\ {}^tBA - {}^tDC = 0 \\ {}^tBB - {}^tDD = -I_q \end{cases}$ car $O \in O(p,q)$

Or $O \in O(n)$: ${}^tOO = I_n = \begin{pmatrix} {}^tAA + {}^tCC & {}^tAB + {}^tCD \\ {}^tBA + {}^tDC & {}^tBB + {}^tDD \end{pmatrix}$

Donc ${}^tCC = 0$ et ${}^tBB = 0 \to \mathrm{tr}({}^tBB) = 0 = \sum_{i,j} b_{ij}^2 \to B = 0$, idem pour C.

donc $O = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A \in O(p)$, $D \in O(q)$ $\to O(p,q) \cap O(n) \overset{\text{homéo}}{\simeq} O(p) \times O(q)$

• Soit $L = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ U I_{p,q} + I_{p,q} U = 0\}$

Alors $\exp : L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to O(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéo (bien défini, injectivité et bicontinuité par le lemme).

Or $L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-ev. isomorphe à $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$:

en effet si $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tA = A$, ${}^tD = D$, ${}^tB = C$

et $U I_{p,q} + I_{p,q} U = 0 \implies \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2D \end{pmatrix} = 0 \implies A = 0 = D$

donc $L \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & {}^tB \\ B & 0 \end{pmatrix},\ B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \right\} \simeq \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$

d'où $O(p,q) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}$