Théorème des événements rares de Poisson :

$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ désigne la détermination principale du logarithme

Théorème : Soit $(r_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ croissante divergeant vers $+\infty$. Soient $(A_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ des événements indépendants dans un espace proba $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ on note

$p_{n,j} := \mathbb{P}(A_{n,j})$ et $S_n = \sum_{j=1}^{r_n} \mathbb{1}_{A_{n,j}}$

On suppose que $\max_{1\le j\le r_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum_{j=1}^{r_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$

Alors $S_n \Rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Démo : on va utiliser le théorème de Lévy. Par indépendance on a

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{j=1}^{r_n} \varphi_{\mathbb{1}_{A_{n,j}}}(t) = \prod_{j=1}^{r_n} \mathbb{E}\left[e^{it\mathbb{1}_{A_{n,j}}}\right]$$

$$= \prod_{j=1}^{r_n}\left((1-p_{n,j}) + p_{n,j}e^{it}\right) = \prod_{j=1}^{r_n}\left(1+p_{n,j}(e^{it}-1)\right)$$

$$= \prod_{j=1}^{r_n}(1+p_{n,j}z) \quad \text{en notant } z = e^{it}-1$$

Lemme (formule de Taylor reste intégral) :

$\forall |z|<1$, $\mathrm{Log}(1+z) = z - z^2\int_0^1 (1-u)\frac{du}{(1+uz)^2}$

preuve : $\mathbb{D} = \{z\in\mathbb{C}, |z|<1\}$ est ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$, on va donc utiliser le prolongement analytique et ne prouver l'identité que sur $\mathbb{R}_+ \cap \mathbb{D}$.

Soit $x \in [0,1[$, on a $\mathrm{Log}(1+x) = \ln(1+x)$ et en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\ln(1+x) = 0 + x + \frac{2}{2!}\int_0^1 (1-t)^{2-1}(1+x-1)^2 \ln''(t(1+x)+(1-t)1)\,dt$$

$$= 0 + x + x^2\int_0^1 (1-t)\frac{dt}{-(1+tx)^2} = x - x^2\int_0^1 \frac{(1-t)dt}{(1+tx)^2}$$

Or $\mathrm{Log}(1+\cdot)$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et $z \mapsto z - z^2\int_0^1 \frac{(1-t)dt}{(1+tz)^2}$ aussi par holomorphie sous l'intégrale. Donc par prolongement analytique, l'égalité est vraie $\forall z\in\mathbb{D}$: $\log(1+z) = z - z^2\int_0^1 \frac{(1-t)dt}{(1+tz)^2}$ /

Notons que comme $\max_{1\le j\le r_n} p_{n,j} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tq $\forall n\in\mathbb{N}, n\ge N$, $\forall j\in\mathbb{N}$, $0\le j\le r_n$ $|p_{n,j}z| < \frac{1}{2}$

et donc pour $n\ge N$, $p_{n,j}z \in \mathbb{D}$ et on peut appliquer le lemme :

$$\mathrm{Log}(\varphi_{S_n}(t)) = \sum_{j=1}^{r_n}\mathrm{Log}(1+p_{n,j}z) = \sum_{j=1}^{r_n} p_{n,j}z - z^2\sum_{j=1}^{r_n} p_{n,j}^2\int_0^1\frac{(1-u)du}{(1+uzp_{n,j})^2}.$$

Or on a $|1+zup_{n,j}| \ge 1 - p_{n,j}|z| \ge \frac{1}{2}$ et donc

Pour $n \geq N$:

$$\left| \sum_{j=1}^{r_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 \frac{(1-u)du}{(1+up_{n,j}z)^2} \right| \leq 4 \sum_{j=1}^{r_n} p_{n,j}^2 \int_0^1 (1-u)du$$

$$\leq 2 \underbrace{\left(\max_{1 \leq j \leq r_n} p_{n,j}\right)}_{\to 0} \underbrace{\sum_{j=1}^{r_n} p_{n,j}}_{\to \lambda} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

On a donc $\left| Log(\varphi_{S_n}(t)) - \sum_{j=1}^{r_n} p_{n,j} z \right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$

Or $\sum_{j=1}^{r_n} p_{n,j} z \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda(e^{it}-1)$

et donc à t fixé, par continuité de $\exp$, $\varphi_{S_n}(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{\lambda(e^{it}-1)}$

Or si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{itk} = e^{-\lambda} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

donc d'après le thm de Lévy, $\boxed{S_n \Rightarrow \mathcal{P}(\lambda)}$

(φ_X est continue en 0)