Formule des compléments :

On utilisera la détermination principale du Log : $\mathrm{Log} : z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+ \mapsto \ln(r) + i\theta$, $z = re^{i\theta}$, $r>0$, $\theta \in]0,2\pi[$

$\mathrm{Log}(-1) = \mathrm{Log}(1\cdot e^{+i\pi}) = i\pi$

Théorème : $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) \in]0,1[$,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Démo : On commence par un premier point :

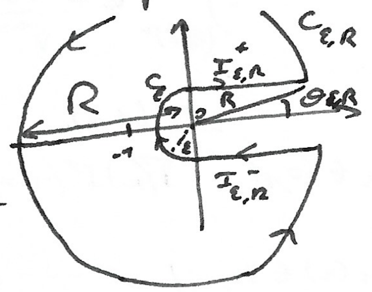
Lemme : $\forall x \in]0,1[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} = \frac{\pi}{\sin \pi x}$

preuve : Notons pour $x \in]0,1[$, $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$ (bien défini car $x \in]0,1[$)

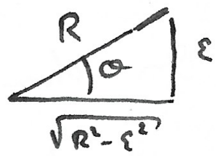
et $\Omega = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Soit $\boxed{f : \begin{vmatrix} \Omega\setminus\{-1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{1}{z^x(1+z)} \end{vmatrix}}$ où $z^x := \exp(x\,\mathrm{Log}(z))$

alors $f \in \mathcal{H}(\Omega\setminus\{-1\})$ clairement. On va calculer I par le théorème des résidus.

Soit le chemin $\begin{cases} \gamma_{\varepsilon,R} = C_\varepsilon \cup I^+_{\varepsilon,R} \cup C_{\varepsilon,R} \cup I^-_{\varepsilon,R} \\ \varepsilon > 0,\ R > 1 \end{cases}$



$\theta_{\varepsilon,R} = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}}\right)$



f n'a qu'un pôle simple à l'intérieur du contour en $z=-1$ et $(1+z)f(z) = \dfrac{1}{z^x} \xrightarrow[z\to -1]{} e^{-i\pi x}$

$\to \underline{\mathrm{Res}(f,-1) = e^{-i\pi x}}$

Alors $\displaystyle\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = e^{-i\pi x} \times 2i\pi$. On étudie chaque composante de $\gamma_{\varepsilon,R}$:

- $\displaystyle\int_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz \underset{z=Re^{it}}{=} \int_\theta^{2\pi-\theta} \frac{iR^{1-x}e^{it(1-x)}}{1+Re^{it}}\,dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^{2\pi} \frac{iR^{1-x}e^{it(1-x)}}{1+Re^{it}}\,dt$ car $\theta_{\varepsilon,R} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ et par continuité de l'intégrale

et $\displaystyle\left|\int_0^{2\pi} \frac{iR^{1-x}e^{it(1-x)}}{1+Re^{it}}\,dt\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{R^{1-x}}{-1+R}\,dt \leqslant 2\pi\frac{R^{1-x}}{R-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$ car $x \in]0,1[$

- $\displaystyle\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| \underset{z=\varepsilon e^{-it}}{=} \left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{-i\varepsilon^{1-x}e^{-it(1-x)}}{1+\varepsilon e^{-it}}\,dt\right| \leqslant 2\pi\frac{\varepsilon^{1-x}}{1-\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$

$\gamma_2(t)^x = e^{x\,\mathrm{Log}(\gamma_2)}$ et $\mathrm{Arg}(\gamma_2) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} -2\pi$ car $\mathrm{Im}(\gamma_2) < 0$

- $\displaystyle\int_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = -\int_0^1 \frac{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}\,dt}{\gamma_2(t)^x(1+\gamma_2(t))}$ et $\dfrac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)^x(1+\gamma_2(t))} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \dfrac{-Re^{-2ix\pi}}{(R(1-t))^x(1+R(1-t))}$

$z = -i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}(1-t) = \gamma_2(t)$

et $|\cdot| \leqslant \dfrac{R}{(R(1-t))^x(1+R(1-t))}$: intégrable sur $[0,1]$ car $x<1$.

donc par cvg dominée : $\displaystyle\int_{I^-_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_0^1 \frac{-Re^{-2ix\pi}\,dt}{(R-Rt)^x(1+R-Rt)} = \int_0^R \frac{-e^{-2ix\pi}}{u^x(1+u)}\,du$ en posant $u = R(1-t)$

- $\displaystyle\int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)\,dt}{\gamma_1(t)^x(1+\gamma_1(t))}$ où $\gamma_1(t) = i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}\,(t)$, $\mathrm{Arg}(\gamma_1) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$ et $\dfrac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)^x(1+\gamma_1(t))} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \dfrac{+R}{(Rt)^x(1+Rt)}$

et par cvg dominée, $\displaystyle\int_{I^+_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_0^R \frac{1}{u^x(1+u)}\,du$

Alors $2i\pi e^{-i\pi x} = \displaystyle\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz \xrightarrow[\substack{\varepsilon\to 0^+ \\ R\to+\infty}]{} (1-e^{-2i\pi x})\,I(x)$ soit encore $I(x) = \dfrac{\pi}{\frac{1}{2i}(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x})}$

c'est à dire $\forall x \in]0,1[$, $\underline{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$

Passons à la preuve du théorème :

Soit $x \in]0,1[$, on a $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \int_0^{+\infty} s^{-x} e^{-s} ds$

$$= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \left(\frac{t}{s}\right)^x \frac{e^{-(t+s)}}{t} \, dt\, ds \qquad \text{Fubini-Tonelli}$$

On effectue le changement de variables suivant : $\varphi : \begin{vmatrix} (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (s,t) \longmapsto (s+t, \frac{t}{s}) \end{vmatrix}$

qui est inversible d'inverse $\varphi^{-1} : \begin{vmatrix} (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^2 \\ (u,v) \longmapsto \left(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v}\right) \end{vmatrix}$. Notons que φ est bien un C^1-difféo

et $|\det(J_{\varphi^{-1}}(u,v))| = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{-u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2} > 0$. Donc le changement de variables

est licite et $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} v^x e^{-u} \frac{1+v}{uv} \frac{u}{(1+v)^2} \, du\, dv$

$$= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} e^{-u} \frac{du\, dv}{v^{1-x}(1+v)} = \int_{\mathbb{R}_+^*} e^{-u} du \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{dv}{v^{1-x}(1+v)} \qquad (\text{F.T.})$$

$$= I(1-x)$$

On a donc $\forall x \in]0,1[$, $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi(1-x))} = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

Or $U := \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) \in]0,1[\}$ est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$, contenant $]0,1[$ et $z \mapsto \Gamma(z)\Gamma(z-1)$ et $z \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ sont holomorphes sur U

donc par prolongement analytique, on a

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tq } \mathrm{Re}(z) \in]0,1[, \quad \Gamma(z)\Gamma(z-1) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Rmq : • Faire attention aux arguments car on travaille avec $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$

• Changement de variable