Formule sommatoire de Poisson :

On prend pour convention $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx$

Théorème: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, pp $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot + n)$ c.v.a. de somme F. $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et est 1-périodique et en notant $\Phi = F\left(\frac{\cdot}{2\pi}\right)$, on a $\forall h \in \mathbb{Z}$, $c_h(\Phi) = \hat{f}(h)$

En particulier, si $\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(h)| < +\infty$, on a

$F(x) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \hat{f}(h) e^{2i\pi h x}$ en tout point $x \in \mathbb{R}$ de continuité de F

preuve: • On a $\int_{\mathbb{R}} |f| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{j+[0,1[} |f| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{[0,1[} |f(x+j)| dx$ $(*)$

et par Fubini-Tonelli, $\int_{[0,1[} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |f(x+j)| dx = \int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty$

Donc pp $x \in [0,1[$, $\sum_{j\in\mathbb{Z}} |f(x+j)| < +\infty$ et idem sur $\mathbb{R}$ par 1-périodicité.

On note donc pp $x \in [0,1[$, $F(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(x+j)$

On a $|F(x)| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} |f(x+j)|$ et par $(*)$ $\int_{[0,1[} |F(x)| dx \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty$ donc par 1-périodicité, $F \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

De plus, soit $h \in \mathbb{Z}$, $c_h(\Phi) = \int_0^{2\pi} \Phi(x) e^{-ihx} dx = \int_{[0,1[} F(x) e^{-2i\pi h x} dx$

$$= \int_{[0,1[} \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(x+j) e^{-2i\pi h x} dx$$

$(*)$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{[0,1[} f(x+j) e^{-2i\pi h x} dx$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{j+[0,1[} f(y) e^{-2i\pi h y} dy = \hat{f}(h).$$

Supposons maintenant F continue en $x \in \mathbb{R}$ et $\sum_{h\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(h)| < +\infty$

alors Φ est continue en $2\pi x$ et sa série de Fourier converge normalement donc Φ est somme de sa série de Fourier en $2\pi x$ (Fejér).

$\to \Phi(2\pi x) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \hat{f}(h) e^{2i\pi h x}$ i.e. $F(x) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} f(x+h) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \hat{f}(h) e^{2i\pi h x}$

Corollaire: Soit $\Theta : \begin{vmatrix} z \in \mathbb{C} \\ Re(z) > 0 \end{vmatrix} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 z}$, alors $\forall v > 0$, $\Theta(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \Theta\left(\frac{1}{v}\right)$

i.e. $\forall v > 0$, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 v} = \frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/v}$

preuve: Soit $\alpha > 0$, on considère $f_\alpha : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$ et on va lui appliquer le théo précédent.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}_\alpha(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} e^{-2i\pi x n} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-2i\pi n u/\sqrt{\alpha}} du}_{= I(n)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} I(n)$

Calculons $I(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-2i\pi x u/\sqrt{\alpha}} du$:

en notant $\varphi : (x,u) \mapsto e^{-u^2} e^{-2i\pi x u/\sqrt{\alpha}}$, $\varphi(x,\cdot)$ est intégrable $\forall x \in \mathbb{R}$, φ est $\mathcal{C}^1$

$\partial_x \varphi(x,u) = -e^{-u^2} e^{-2i\pi x u/\sqrt{\alpha}} \frac{2i\pi u}{\sqrt{\alpha}}$ et $|\partial_x \varphi(x,u)| \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}} |u| e^{-u^2}$: intégrable

donc par dérivation sous l'intégrale, I est $\mathcal{C}^1$ et

$$I'(x) = -\frac{2i\pi}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} u e^{-u^2} e^{-2i\pi x u/\sqrt{\alpha}} du$$

Et alors, $\forall x \neq 0$

$$I(x) = \underbrace{\left[e^{-u^2} \frac{e^{-2i\pi x u/\sqrt{\alpha}}}{-2i\pi x/\sqrt{\alpha}} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \frac{1}{i\pi x/\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} u e^{-u^2} e^{-2i\pi x u/\sqrt{\alpha}} du$$

$$= + \frac{i\sqrt{\alpha}}{\pi x} \int_{\mathbb{R}} u e^{-u^2} e^{-2i\pi x u/\sqrt{\alpha}} du$$

$$= -\frac{\alpha}{2\pi^2 x} I'(x)$$

donc $I(x) = I(0) e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}}$

et $I(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ $\quad \rightarrow I(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\pi^2 x^2}{\alpha}}$

En appliquant la formule de Poisson en 0 on obtient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\alpha n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}$$

et en posant $\alpha = \pi/v$ pour $v > 0$, on a bien

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2/v} = \sqrt{v} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 v}$$

Ce qui est bien la formule attendue $\Theta(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \Theta\left(\frac{1}{v}\right)$