## • Gradient à pas optimal :

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\Phi \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax,x\rangle - \langle b,x\rangle \end{array}\right.$, $\nabla\Phi(x) = Ax - b$

**Théorème :** $\Phi$ atteint son minimum en $\bar{x}$ la solution de $Ax=b$ et seulement ce point.
De plus, si on définit la suite $\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla\Phi(x_k) \end{cases}$ où $\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{\|\nabla\Phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\Phi(x_k)\|_A^2} & \text{si } x_k \neq \bar{x} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

alors $\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq \sqrt{\mathrm{Cond}(A)} \left(\dfrac{\mathrm{Cond}(A)-1}{\mathrm{Cond}(A)+1}\right)^{k+1} \|x_0 - \bar{x}\|$

En particulier, $(x_n)_n$ cvg géométriquement vers $\bar{x}$.

**Preuve :** La preuve s'appuie sur le lemme de Kantorovich :

**Lemme :** $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, $\left(\dfrac{\|x\|^2}{\|x\|_{A^{-1}}\|x\|_A}\right)^2 \geq 4 \dfrac{\lambda_{max}\lambda_{min}}{(\lambda_{max}+\lambda_{min})^2}$

preuve : soit $x \in \mathbb{R}^n$, c'est trivial si $x=0$.
sinon : soit $e_1, \dots, e_n$ b.o.n de vp pour $A$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les v.p. associées, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Alors
$$\|x\|_{A^{-1}}^2 \|x\|_A^2 = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^{-1} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\right) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_{max}} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_{min}}{\lambda_i} x_i^2\right)$$

$$\to \quad \|x\|_{A^{-1}}\|x\|_A \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}} \underline{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{max}} + \frac{\lambda_{min}}{\lambda_i}\right) x_i^2} \qquad \left(ab \leq \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)\right)$$

Or $t \mapsto \dfrac{t}{\lambda_{max}} + \dfrac{\lambda_{min}}{t}$ est convexe sur $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$
et vaut $\dfrac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}} + 1$ en $\lambda_{min}$ et $\lambda_{max}$, donc est majoré par $1 + \dfrac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}$

$\to \|x\|_{A^{-1}}\|x\|_A \leq \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}\left(1 + \dfrac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right)\|x\|^2$ ce qui est le résultat voulu.

Pour la suite on note $g_k := \nabla\Phi(x_k)$. Soit $p \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{p+1} - \bar{x}\|_A^2 = \langle A(x_{p+1}-\bar{x}), x_{p+1}-x_p\rangle + \langle A(x_{p+1}-\bar{x}), x_p - \bar{x}\rangle \qquad \left( \begin{array}{l} A(x_{p+1}-\bar{x}) = Ax_{p+1} - b = \nabla\Phi(x_{p+1}) \\ x_{p+1} - x_p = -\alpha_p \nabla\Phi(x_p) \end{array} \right)$$
$$= -\alpha_p \langle \nabla\Phi(x_{p+1}), \nabla\Phi(x_p)\rangle + \langle A(x_{p+1}-\bar{x}), x_p - \bar{x}\rangle$$

Or $f : t \mapsto \Phi(x_k - t\nabla\Phi(x_k))$ atteint son min. en $\alpha_k$ donc $\underbrace{f'(\alpha_k)}_{\langle \nabla\Phi(x_{k+1}), \nabla\Phi(x_k)\rangle} = 0$

donc
$$\|x_{p+1} - \bar{x}\|_A^2 = \langle A(x_{p+1}-\bar{x}), x_p - \bar{x}\rangle = \langle A(x_{p+1}-x_p), x_p - \bar{x}\rangle + \langle A(x_p-\bar{x}), x_p - \bar{x}\rangle$$
$$= \langle A(x_p-\bar{x}), x_{p+1}-x_p\rangle + \|x_p - \bar{x}\|_A^2$$
$$= -\alpha_p\|g_p\|^2 + \|x_p-\bar{x}\|_A^2 = -\frac{\|g_p\|^4}{\|g_p\|_A^2} + \|x_p - \bar{x}\|_A^2$$

et $\|x_p - \bar{x}\|_A^2 = \langle A(x_p-\bar{x}), x_p-\bar{x}\rangle = \langle A^{-1}A(x_p-\bar{x}), A(x_p-\bar{x})\rangle = \|g_p\|_{A^{-1}}^2$

$$\to \|x_{p+1} - \bar{x}\|_A^2 = \left(1 - \frac{\|g_p\|^4}{\|g_p\|_A^2\|g_p\|_{A^{-1}}^2}\right)\|x_p - \bar{x}\|_A^2$$

En appliquant Kantorovich :

$$\left(1-\left(\frac{\|g_p\|^2}{\|g_p\|_{A^{-1}}\|g_p\|_A}\right)^2\right) \leq 1-4\frac{\lambda_{max}\lambda_{min}}{(\lambda_{max}+\lambda_{min})^2} = \frac{(\lambda_{max}-\lambda_{min})^2}{(\lambda_{max}+\lambda_{min})^2}$$

$\to$ $\underline{\|x_{p+1}-\bar{x}\|_A \leq \frac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{\lambda_{max}+\lambda_{min}}\|x_p-\bar{x}\|_A}$ (Rmq : ceci assure la cvg géométrique de la méthode)

On a par récurrence $\|x_{p+1}-\bar{x}\|_A \leq \left(\frac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{\lambda_{max}+\lambda_{min}}\right)^{k+1}\|x_0-\bar{x}\|_A$

et comme $\sqrt{\lambda_{min}}\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_A \leq \sqrt{\lambda_{max}}\|\cdot\|$ on a

$\|x_0-\bar{x}\|_A \leq \sqrt{\lambda_{max}}\|x_0-\bar{x}\|$ et $\|x_{p+1}-\bar{x}\|_A \geq \sqrt{\lambda_{min}}\|x_{p+1}-\bar{x}\|$

$$\longrightarrow \|x_{p+1}-\bar{x}\|_A \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}\left(\frac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{\lambda_{max}+\lambda_{min}}\right)^{k+1}\|x_0-\bar{x}\|$$

i.e. en notant $\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \mathrm{Cond}(A)$,

$$\|x_{p+1}-\bar{x}\|_A \leq \sqrt{\mathrm{Cond}\,A}\left(\frac{\mathrm{Cond}(A)-1}{\mathrm{Cond}(A)+1}\right)^{k+1}\|x_0-\bar{x}\|$$

---

<u>Rmq</u> : Le lien entre le système $Ax=b$ et la minimisation de $\Phi$ est évident du fait que $Ax-b=\nabla\Phi(x)$.

De plus, comme le gradient $\nabla\Phi(x)$ indique le sens croissant de $\Phi$, il est naturel de vouloir aller dans le sens contraire, i.e. dans la direction de $-\nabla\Phi(x_k)$ avec le plus d'amplitude possible.

C'est pour cela qu'on considère $t \mapsto \Phi(x_k - t\nabla\Phi(x_k))$ qui atteint son minimum en $\alpha_k = \frac{\|\nabla\Phi(x_k)\|^2}{\|\nabla\Phi(x_k)\|_A^2}$. Ainsi, à chaque étape, on "descend" orthogonalement vers $\bar{x}$ par rapport aux lignes de niveaux de $\Phi$. En effet $\langle\nabla\Phi(x_{k+1}),\nabla\Phi(x_k)\rangle = 0$ où $x_{k+1} = x_k - \alpha_k\nabla\Phi(x_k)$.