# Théorème de Grothendieck :

Théorème : Soit $p \geq 1$, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de mesure finie.

Soit $S$ un sev. fermé de $L^p(\mu)$ tq $S \subset L^\infty(\mu)$,
Alors $\dim S < +\infty$.

Remarques : · On commence par montrer qu'on peut se ramener au cas de $L^2(\mu)$ où on a les outils d'analyse hilbertienne.
· On peut supposer que $\mu(X) = 1$ (quitte à remplacer $\mu$ par $\nu = \frac{\mu}{\mu(X)}$).

· Lemme 1 : Sur l'espace $S$, $\|\cdot\|_{L^p}$ et $\|\cdot\|_{L^\infty}$ sont équivalentes.

démo : on a immédiatement que $\forall f \in S$, $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}$. De plus, cette inégalité montre la continuité de $i : (S, \|\cdot\|_{L^\infty}) \hookrightarrow (S, \|\cdot\|_{L^p})$ et comme $S$ est fermé dans $L^p(\mu)$, $S$ est également fermé dans $L^\infty(\mu)$ ($i$ est continue) et donc $(S, \|\cdot\|_{L^\infty})$ est complet, de même $(S, \|\cdot\|_{L^p})$ est un Banach également.
Donc, pour montrer la continuité de $j : (S, \|\cdot\|_{L^p}) \hookrightarrow (S, \|\cdot\|_{L^\infty})$ il suffit de montrer que son graphe est fermé.
Soit $(f_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ tq $f_n \xrightarrow{L^p} f$ et $f_n \xrightarrow{L^\infty} g$ avec $f, g \in S$ ($S$ fermé).
à extraction près, on a cvg pp. de $(f_n)_n$ vers $f$ et $(f_n)_n$ vers $g$, donc $f = g$ pp. $\rightarrow$ le graphe de $j$ est fermé, donc d'après le théorème du graphe fermé, $j$ est continue ($(S, \|\cdot\|_{L^p})$ et $(S, \|\cdot\|_{L^\infty})$ sont de Banach).
$\hookrightarrow \exists C > 0$, $\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^p}$, $\forall f \in S$ d'où l'équivalence des normes.

· Lemme 2 : ($S \subset L^2(\mu)$ et de plus) $k : (S, \|\cdot\|_{L^2}) \hookrightarrow (S, \|\cdot\|_{L^\infty})$ est continue

démo : Soit $f \in S$,
si $p \leq 2$, d'après Hölder, $\|f\|_{L^p} \leq \mu(X)^{\frac{2-p}{2p}} \|f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$
et d'après le lemme 1, $\|f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^2}$ : $k$ continue.
si $p \geq 2$ : notons que $|f|^p = |f|^{p-2} |f|^2$ et $|f|^{p-2} \leq \|f\|_{L^\infty}^{p-2}$ $\mu$ p.p.
$\rightarrow \|f\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^\infty}^{p-2} \|f\|_{L^2}^2$ et par le lemme 1 :

$$\left(\frac{1}{C}\right)^p \|f\|_{L^\infty}^p \leq \|f\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^\infty}^{p-2} \|f\|_{L^2}^2 \rightarrow \|f\|_{L^\infty} \leq C^{p/2} \|f\|_{L^2}$$

$\rightarrow$ $k$ continue.

Remarque : On va montrer que toute famille libre de $S$ est nécessairement finie, de cardinal borné par $\beta := \|k\|$.
Notons que via le procédé de Gram-Schmidt, si $N \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_{1 \leq n \leq N} \in S^N$ est une famille libre, on peut supposer $(f_n)_{1 \leq n \leq N}$ orthonormée, quitte à la remplacer par $(\tilde{f}_n)_{1 \leq n \leq N}$ obtenue avec le procédé (Les espaces vectoriels engendrés restent les mêmes à chaque étape de l'algo).

Soit donc $N \in \mathbb{N}^*$ et $(f_n)_{1 \leq n \leq N} \in S^N$ une famille orthonormée (pour $L^2(\mu)$), on définit $T : \left| \begin{array}{l} \overline{B_{\mathbb{C}^N}(0,1)} \longrightarrow V \\ b = (b_1, \dots, b_N) \longmapsto \sum_{i=1}^{N} b_i f_i \end{array} \right.$, comme $\overline{B_{\mathbb{C}^N}(0,1)}$ est compact, il est séparable et donc admet une partie dense $(b^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ dénombrable.

D'après le lemme 2, et l'orthonormalité de $f_i$, on a

$$\| T(b^{(k)}) \|_{L^\infty} \leq \beta \| T(b^{(k)}) \|_{L^2} \leq \beta \quad (\text{car } b^{(k)} \in \overline{B_{\mathbb{C}^N}(0,1)})$$

et donc par définition de $\|\cdot\|_{L^\infty}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists A_k \in \mathcal{A}$ tq $\mu(A_k) = 1$ et $|T(b^{(k)})(x)| \leq \beta$, $\underline{\underline{\forall x \in A_k}}$

Soit $A = \bigcap_{k \geq 0} A_k$, on a $\mu(A) = 1$ (intersection dénombrable) et $\forall x \in A, \forall k \in \mathbb{N}, |T(b^{(k)})(x)| \leq \beta$.

De plus $T_x : b \mapsto T(b)(x)$ est linéaire continue $\forall x \in A$ (application linéaire en dimension $N$).

donc par prolongement, $\underline{\forall x \in A, \forall b \in \overline{B_{\mathbb{C}^N}(0,1)}, |T(b)(x)| \leq \beta}$

On définit pour $x \in A$, $c(x) \in \overline{B_{\mathbb{C}^N}(0,1)}$ par

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{(\overline{f_1(x)}, \dots, \overline{f_N(x)})}{\| (f_1(x), \dots, f_N(x)) \|_2} & \text{si } \forall 1 \leq n \leq N, f_n(x) \neq 0 \\ (0, \dots, 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $\forall x \in A$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |f_i(x)|^2 = |T(\underbrace{c(x)}_{\in \overline{B_{\mathbb{C}^N}(0,1)}})(x)|^2 \leq \beta^2$

Comme $\mu(A) = 1$, on obtient en intégrant sur $X$ :

$$N \underset{\text{orthonormalité}}{=} \sum_{i=1}^{N} \int_X |f_i(x)|^2 d\mu(x) \underset{\mu(A) = \mu(X)}{=} \int_A \sum_{i=1}^{N} |f_i(x)|^2 d\mu(x) \leq \beta^2 \mu(A) = \beta^2$$

$\rightarrow N \leq \beta^2$

$\rightarrow$ Toute famille libre est de cardinal majoré par $\beta^2$

donc $\underline{\dim V < +\infty}$.