Théorème de Hadamard-Lévy : CNS pour être un $\mathcal{C}^1$ difféo de $\mathbb{R}^n$

Théorème :

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, on a équivalence :

- f est un $\mathcal{C}^1$ difféo de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même

et

- f est propre et $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $d_x f$ est inversible

Remarque : le résultat est vrai pour f seulement $\mathcal{C}^1$, mais la démo est trop longue.

Preuve :

$\Rightarrow$ | Comme f^{-1} est continue, f^{-1} envoie ~~tout~~ tout compact de $\mathbb{R}^n$ sur un autre : f est propre.

De plus, $f \circ f^{-1} = Id = f^{-1} \circ f$ et donc en différentiant $d_{f(x)} f^{-1} \circ d_x f = Id$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$d_{f^{-1}(y)} f \circ d_y(f^{-1}) = Id$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$

donc $d_x f$ est inversible $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

$\Leftarrow$ | Supposons f propre et $d_x f$ inversible en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

- f est surjective : Comme $\mathbb{R}^n$ est connexe, il suffit de montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$, on conclut par connexité.

. Soit $y_0 = f(x_0)$ quelconque, par inversion locale, comme $d_{x_0} f \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe des voisinages ouverts $V, W \subset \mathbb{R}^n$ contenant respectivement x_0 et y_0 tels que $f : V \to W$ soit un $\mathcal{C}^1$ difféo. Alors $W = f(V) \subset f(\mathbb{R}^n)$: $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert

. Soit $(y_k)_k = (f(x_k))_k \in (f(\mathbb{R}^n))^{\mathbb{N}}$ tels que $y_k \to y \in \mathbb{R}^n$ et $K = \{y_k\}_k \cup \{y\}$.

Alors K est un compact de $\mathbb{R}^n$ (fermé borné). Comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_k \in f^{-1}(K)$ et que f est propre, $f^{-1}(K)$ est compact et on peut extraire une sous-suite convergente $x_{k_i} \xrightarrow[i \to +\infty]{} x \in f^{-1}(K)$

Par continuité, on a $y_{k_i} = f(x_{k_i}) \xrightarrow[i \to +\infty]{} f(x)$, et par unicité de la limite : $y = f(x)$

$\hookrightarrow y \in f(\mathbb{R}^n)$: $f(\mathbb{R}^n)$ fermé

- f est injective : soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque $\overset{\text{fixé}}{\vee}$, on considère $g = f - f(x_0)$, g vérifie les mêmes hypothèses que f et $g(x_0) = 0$. Il suffit de montrer que $Z(g) := \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) = 0\} = \{x_0\}$ et l'injectivité suivra.

. $\#Z(g) < +\infty$: par l'absurde, si $Z(g)$ a un nombre infini de points, comme $Z(g) = g^{-1}(\{0\})$, $Z(g)$ est compact (g est propre) donc $Z(g)$ a un point d'accumulation $x \in Z(g)$. Comme $d_x g$ est inversible, par inversion locale g est un difféo entre V et $h(V)$ pour un voisinage ouvert de x assez petit et en particulier, $g_{|V}$ est injective. Or x est d'accumulation dans $Z(g)$ donc $\exists\, \tilde{x} \in Z(g) \setminus \{x\}$ tel que $\tilde{x} \in V$ i.e. $\underset{\in V}{\tilde{x}} \neq \underset{\in V}{x}$ et $g(\tilde{x}) = g(x) = 0$: absurde par injectivité de $g_{|V}$

. Notons $Z(g) = \{p_1, \dots, p_N\}$. On montre que $N=1$

Soit $F : x \in \mathbb{R}^n \mapsto (d_x g)^{-1} \cdot (g(x))$, bien définie et $\mathcal{C}^1$ par hypothèses sur f ($f \in \mathcal{C}^2$)

$\forall q \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy $\begin{cases} \dot{x}(t) = -F(x(t)) \\ x(0) = q \end{cases}$ admet une unique solution maximale x sur $[0, T^*)$

1) $T^* = +\infty$: pour $t \in [0, T^*)$ on a

$\frac{d}{dt}(g(x(t))) = d_{x(t)} g \cdot \dot{x}(t) = -(d_{x(t)} g)(d_{x(t)} g)^{-1} \cdot g(x(t)) = -g(x(t)) \Rightarrow \boxed{g(x(t)) = e^{-t} g(q)}$

Comme $t \geq 0$, $\|g(x(t))\| \leq \|g(q)\|$ et par suite, $x(t) \in g^{-1}(B(0, \|g(q)\|))$: compact car g est propre

Par le thm de sortie de tout compact, $T^* = +\infty$

2) $\forall i \in [\![1;N]\!]$, p_i est asymptotiquement stable :

i.e. $F(p_i) = 0$ et $\exists \delta > 0$ tq si x est issue de q avec $|q - p_i| < \delta$ alors $\lim_{t \to +\infty} x(t) = p_i$

d'abord, $F(p_i) = (d_{p_i} g)^{-1} \cdot (\underbrace{g(p_i)}_{=0}) = 0$

Ensuite, g est un difféo de $B(p_i, \delta)$ sur un voisinage V de 0 pour $\delta > 0$ assez petit (inversion locale)

Si $y \in V$, on note $q = g^{-1}(y)$, $x(t) := g^{-1}(e^{-t} y)$ et la trajectoire issue de q.

En effet, $x(0) = q$ et on a vu précédemment que $\dot{x}(t) = -F(x(t))$, on conclut par unicité.

Alors $\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} g^{-1}(e^{-t} y) = g^{-1}(0) = p_i$ car g est injective sur $B(p_i, \delta)$.

On note $W_i = \{q \in \mathbb{R}^n$, la trajectoire issue de q converge vers p_i pour $t \to +\infty\}$.

3) $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{N} W_i$:

Soit $q \in \mathbb{R}^n$ et x la trajectoire associée, alors 1) $\Rightarrow$ $x(t)$ reste dans un compact pour $t \geq 0$. Donc $\exists (t_n)_n \nearrow$ tq $x(t_n) \to L$ et $g(L) = 0$ par continuité, donc $L = p_i$ pour un certain $i \in [\![1;N]\!]$.

Pour $n \geq k_0$ assez grand $x(t_{k_0}) \in B(p_i, \delta)$ (cf 2)) et donc la trajectoire issue de $x(t_{k_0})$ converge vers p_i.

Or $z = x(\cdot + t_{k_0})$ est une trajectoire issue de $x(t_{k_0})$ aussi, donc par unicité dans Cauchy-Lipschitz $z(t) \to p_i$ et par suite $x(t) \to p_i$: $q \in W_i$

4) W_i est ouvert :

Soit $q \in W_i$, x la trajectoire associée, par définition de W_i, il existe un temps $T > 0$ tel que $|x(T) - p_i| < \delta/2$. Notons y la trajectoire issue de $q' \in \mathbb{R}^n$, alors par continuité par rapport à l'instant initial, $\exists \varepsilon > 0$ tq $|q - q'| < \varepsilon \Rightarrow |x(T) - y(T)| < \delta/2$.

Il vient que $|y(T) - p_i| \leq |y(T) - x(T)| + |x(T) - p_i| < \delta$

Comme p_i est asymptotiquement stable, $y(\cdot + T)$ cvg vers p_i et donc $y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} p_i$: $q' \in W_i$

donc $B(q, \varepsilon) \subset W_i$: W_i ouvert.

Comme $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{N} W_i$ avec chaque W_i ouvert non vide ($p_i \in W_i$) et que $W_i \cap W_j = \emptyset$, on a nécessairement $N = 1$ par connexité de $\mathbb{R}^n$.

D'où $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $(f - f(x_0))^{-1}(\{0\}) = \{x_0\}$ i.e., f est injective

D'où le résultat.

Ref : Zuily-Queffélec (p 395), Adrien Fontaine.