Lemme de Morse :

Théorème : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$ tq $d_0 f = 0$ et $d_0^2 f$ est non-dégénérée (0 est un point critique non-dégénéré). Alors il existe V et W voisinages ouverts de 0 et $\varphi : W \to V$ un $\mathcal{C}^1$ difféo tq $\varphi(0) = 0$ et

$$\forall x \in W, \quad f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^{p} u_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} u_i^2 \quad \text{où} \quad u = \varphi(x)$$

et $(p, n-p)$ est la signature de $d_0^2 f$

démo : En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à f à l'ordre 1 : $\forall x \in U$, $f(x) - f(0) - d_0 f \cdot x = \int_0^1 \frac{(1-t)^1}{1!} d_{tx}^2 f \cdot (x,x)\, dt$

Soit encore, au voisinage de 0 : $f(x) = f(0) + Q(x)(x,x)$

où $Q(x) := \int_0^1 (1-t)\, d_{tx}^2 f \, dt$

Lemme : Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$, il existe V voisinage de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\rho : V \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tq $\forall A \in V$, $A = {}^t\rho(A) A_0 \rho(A)$

preuve :

- $\chi : \begin{vmatrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto {}^tM A_0 M \end{vmatrix}$ est polynomiale donc $\mathcal{C}^1$ et pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\chi(I_n + H) - \chi(I_n) = {}^t(I_n+H)A_0(I_n+H) - {}^tI_n A_0 I_n$$
$$= {}^t(A_0 H) + A_0 H + o(H^2) \quad \text{car } A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

$\to d_{I_n}\chi \cdot H = {}^t(A_0 H) + A_0 H$ et donc $\underline{H \in \mathrm{Ker}(d_{I_n}\chi)}$ ssi $\underline{A_0 H \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$.

- On veut appliquer le TIL à χ mais impossible car $d_{I_n}\chi$ n'est pas inversible

Soit $F = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tq } A_0 H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\} = A_0^{-1} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

et $\psi : \begin{vmatrix} F \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M \mapsto \chi(M) \end{vmatrix}$, on a $I_n \in F$ et $\mathrm{Ker}(d_{I_n}\psi) = \mathrm{Ker}(d_{I_n}\chi) \cap F = \{0\}$.

Or $\dim F = \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $d_{I_n}\psi$ est injective, donc bijective.

Comme ψ est $\mathcal{C}^1$, par inversion locale il existe U voisinage ouvert de I_n dans F tq $\psi : U \to V = \psi(U)$ soit un $\mathcal{C}^1$ difféo. On peut supposer que $U \subset GL_n(\mathbb{R})$ quitte à considérer $U \cap U'$ où U' est un voisinage ouvert de I_n dans $GL_n(\mathbb{R})$ (ok car det est continue).

Ainsi, V est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I_n)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et

$\forall A \in V$, $A = {}^t\psi^{-1}(A) A_0 \psi^{-1}(A)$ $\to$ on pose $\underline{\rho = \psi^{-1}}$

On a au voisinage de 0 : $f(x) - f(0) = Q(x)(x,x)$

où $Q(x) = \int_0^1 (1-t)\, d^2_{tx} f \, dt$ est symétrique car $f \in \mathcal{C}^2$ (Lemme de Schwarz)

et $Q(0) = \frac{1}{2} d^2_0 f$ est inversible car $d^2_0 f$ est non dégénérée.

Par le lemme, il existe V voisinage de $Q(0)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et (*)

$\rho : V \to GL_n(\mathbb{R})$ tq $\forall A \in V$, $A = {}^t\rho(A)\, Q(0)\, \rho(A)$
$\in \mathcal{C}^1$

Or Q est continue donc comme $Q(0) \in V$, $\exists W$ voisinage de 0 tq $\forall x \in W$

$Q(x) \in V$ et alors $\underline{Q(x) = {}^t\rho(Q(x))\, Q(0)\, \rho(Q(x))}$, $\forall x \in W$.

Soit donc $M(x) := \rho(Q(x))$, M est $\mathcal{C}^1$ sur W.

En confondant avec l'écriture matricielle comme ci-dessus (*)

On a $Q(x)(y,z) = {}^t y\, Q(x)\, z$ et en posant $y = M(x)x$, on obtient

$\forall x \in W$, $f(x) = f(0) + {}^t y\, Q(0)\, y$

Or $\operatorname{sgn}(Q(0)) = (p, n-p)$ donc $\exists A \in GL_n(\mathbb{R})$ tq ${}^t A\, Q(0)\, A = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-p} \end{array}\right)$

En posant $v = A^{-1} y$, on a

$$f(x) = f(0) + {}^t v\, ({}^t A\, Q(0)\, A)\, v$$

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{p} v_i^2 - \sum_{i=p+1}^{n} v_i^2$$

En posant finalement $\varphi : \begin{array}{l} W \to V = \varphi(W) \\ x \mapsto A^{-1} M(x) x \end{array}$, $\varphi(0) = 0$, φ est $\mathcal{C}^1$ sur W

et $\forall h \in W$, $\varphi(h) = A^{-1} M(h) h = A^{-1} M(0) h + o(h)$ car $M(h) = M(0) + o(1)$

$\to d_0 \varphi \cdot h = A^{-1} M(0) \in GL_n(\mathbb{R})$

et par TIL, φ définit bien un $\mathcal{C}^1$-difféo entre $\underline{2 \text{ voisinages de } 0}$.