· Théorème de Liapounov :

Théorème : Soit le système $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(a) = \cancel{x} \end{cases}$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est $\mathcal{C}^1$ et $f(a) = 0$

On suppose que $Re(Sp(d_a f)) \subset \mathbb{R}_-^*$, alors a est un point d'équilibre stable/attractif du système

Preuve : on traite le cas $a=0$ pour alléger les notations, on note $A = d_0 f$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A et $m_1, \dots, m_k$ leur multiplicité.

Soit $(L) : \begin{cases} z' = Az \\ z(0) = x \end{cases}$ le système linéarisé, l'idée est de transporter la stabilité de 0 au cas non-linéaire.

Lemme : $\exists P \in \mathbb{R}[X], \alpha > 0$ tq $\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|e^{tA}x\| \leq P(|t|)e^{-\alpha t}\|x\|$

(où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$)

- preuve : On a $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} (A - \lambda_i)^{m_i}$ et donc $x = x_1 + \dots + x_k$ avec $x_i \in \ker(A-\lambda_i)^{m_i}$ de façon unique

Soit $\alpha > 0$ tq $-\alpha > \max_{1 \leq i \leq k} Re(\lambda_i)$, on a

$$e^{tA}x_j = e^{t\lambda_j} e^{t(A-\lambda_j)} = e^{t\lambda_j} \sum_{p=0}^{m_j - 1} \frac{t^p}{p!}(A-\lambda_j)^p x_j$$

et donc par sous-multiplicativité de $|||\cdot|||$ associée à $\|\cdot\|$:

$$\|e^{tA}x\| \leq \sum_{j=1}^{k} \left(e^{t Re(\lambda_j)} \sum_{p=0}^{m_j-1} \frac{|t|^p}{p!} |||A - \lambda_j|||^p \cdot \|x_j\| \right)$$

$$\leq e^{-t\alpha} P(|t|) \max_{1 \leq j \leq k} \|x_j\| \leq C e^{-t\alpha} P(|t|) \|x\|$$

Notons que comme $z(t) = e^{tA}x$ est la solution de (L), $\|z(t)\| \leq CP(|t|)e^{-t\alpha}\|x\|$ donc $\|z\|$ décroît exponentiellement vite vers 0 : 0 est stable

· Soit maintenant $b : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+} \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle \, dt \end{array}$

d'une part b est bien définie car $|\langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle| \leq \|e^{tA}x\| \cdot \|e^{tA}y\| \leq C^2 e^{-2\alpha t} P^2(|t|)\|x\|\|y\|$ → intégrable en $+\infty$.

D'autre part, par linéarité de l'intégrale et bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, b est bilinéaire. La symétrie et la positivité découlent de celles de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Enfin comme $e^{tA} \in GL_n(\mathbb{R})$, $\langle e^{tA}\cdot, e^{tA}\cdot \rangle$ est définie : b est un produit scalaire

Donc $q : x \in \mathbb{R}^n \mapsto b(x,x)$ définit une norme (forme quadratique définie positive)

· On montre maintenant l'existence de $\alpha, \beta > 0$ tels que $q(y) \leq \alpha \Rightarrow q(y)' \leq -\beta q(y)$ où y désigne l'unique solution du problème non linéarisé.

On a $\nabla q(x) \cdot Ax = 2b(x, Ax) = 2\int_{\mathbb{R}_+} \langle e^{tA}x, e^{tA}Ax \rangle dt$ or $2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle = \frac{d}{dt}\left(\|e^{tA}x\|^2\right)$

$$= +\left[\|e^{tA}x\|^2\right]_0^{+\infty} = -\|x\|^2 \quad \text{car } \mathrm{Re}(\mathrm{sp}(A)) \subset \mathbb{R}_-^*$$

On note $r(y) = f(y) - Ay$ "l'écart" entre le linéarisé et le système perturbé.

Alors $\underline{q(y)'} = \nabla q(y) \cdot y' = \nabla q(y) \cdot f(y)$

$$= 2b(y, f(y)) = 2b(y, r(y)) + 2b(y, Ay)$$

$$= \underline{-\|y\|^2 + 2b(y, r(y))}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$, $r(y) = f(y) - Ay = f(y) - f(0) - d_0 f \cdot y$

Par définition de la différentielle et équivalence des normes en dimension finie,

$r(y) = o(\sqrt{q(y)})$ donc $\exists \alpha > 0$ tq $q(y) \leq \alpha \Rightarrow \sqrt{q(r(y))} \leq \varepsilon \sqrt{q(y)}$

et donc $|b(y, r(y))| \leq \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$ ← on travaille avec $\|\cdot\|_q = \sqrt{q(\cdot)}$

$$\leq \varepsilon\, q(y)$$

en utilisant l'équivalence des normes $\exists C > 0$ tq $C q(y) \leq \|y\|^2$

et donc $q(y)' \leq -(C - 2\varepsilon)\, q(y)$ où $\beta = C - 2\varepsilon$ donc

$q(y) \leq \alpha \Rightarrow q(y)' \leq -\beta\, q(y)$ (ε est pris assez petit pour que $\beta > 0$)

- D'après ce qui précède, tant que $q(y)(t) \leq \alpha$, on a $q(y)'(t) \leq -\beta\, q(y)(t)$.

Cette condition est satisfaite pour tout t dès que $q(x) < \alpha$.

En effet, sinon $\exists t_0 > 0$ (minimal) tq $q(x) = \alpha$ d'où $q(y)'(t_0) \leq -\beta q(y)(t_0) < 0$

donc $q(y)$ est décroissante au voisinage de t_0 ce qui contredit la minimalité de t_0

donc $q(x) < \alpha \Rightarrow q(y(t)) \leq \alpha, \forall t \geq 0$ donc $q(y)'(t) \leq -\beta q(y)(t), \forall t \geq 0$.

D'après le lemme de Gronwall, $q(y)(t) \leq e^{-\beta t} q(x)$ pour $t \geq 0$.

Ainsi, pour x assez proche de 0, i.e. $q(x) < \alpha$, on a bien $q(y)$ qui décroît exponentiellement vers 0, le résultat est démontré.