Théorème 0.0.1 :

Soient $a < b \in \overline{\mathbb{R}}$, $I = (a,b)$, $\phi \in C^2(I;\mathbb{R})$, $f \in C^0(I;\mathbb{C}$ tels que

— $\forall t > 0$,
$$\int_a^b e^{t\phi(x)}|f(x)|dx < +\infty$$
— Il existe un unique $x_0 \in I$ tel que $\phi'(x_0) = 0$

— x_0 est un maximum absolu strict sur I, $\phi''(x_0) < 0$ et $f(x_0) \neq 0$

On pose $\forall t \in I,\ F(t) = \int_a^b e^{t\phi(x)} f(x)\ dx$. Alors
$$F(t) \sim_{t\to+\infty} \sqrt{t\frac{2\pi}{t|\phi''(x_0)|}} e^{t\phi(x_0)} f(x_0)$$

On considère le développement de Taylor de ϕ en x_0 : il existe $\psi \in C^0(I;\mathbb{R}) \cap C^2(I \setminus \{x_0\};\mathbb{R})$ telle que
$$\forall x \in I,\ \phi(x) = \phi(x_0) + (x-x_0)^2\psi(x) \quad \text{et} \quad \psi(x_0) = \frac{1}{2}\phi''(x_0)$$
Pour $\delta > 0$ assez petit, on a $J_\delta := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ et $\psi < 0$ sur J_δ. On pose $\forall x \in J_\delta,\ u(x) = (x - x_0)\sqrt{-\psi(x)}$.

Lemme 0.0.2 :

$u \in C^2(I \setminus \{x_0\};\mathbb{R})$ et se prolonge de manière C^1 en x_0 de sorte que $u'(x_0) = \sqrt{-\phi''(x_0)/2} > 0$.

Démonstration. Pour $x \neq x_0$, on a $\psi(x) = \frac{\phi(x)-\phi(x_0)}{(x-x_0)^2}$ de sorte que $(x-x_0)\psi'(x) = \frac{\phi'(x)-\phi'(x_0)}{x-x_0} - 2\psi(x)$.
Ainsi, $(x-x_0)\psi'(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ et donc si $x \in J_\delta \setminus \{x_0\}$,
$$u'(x) = \sqrt{-\psi(x)} - (x-x_0)\frac{\psi'(x)}{2\sqrt{-\psi(x)}} \xrightarrow[x\to x_0]{} \sqrt{\frac{-1}{2}\phi''(x_0)}$$
□

Quitte à réduire δ, on peut supposer que $u' \neq 0$ sur J_δ. Prenons $\theta \in \mathcal{D}(J_\delta)$ telle que $0 \leq \theta \leq 1$ et $\theta = 1$ sur $J_{\delta/2}$. Alors
$$F(t) = \int_a^b e^{t\phi(x)}\theta(x)f(x)\ dx + \int_a^b e^{t\phi(x)}(1-\theta(x))f(x)\ dx =: F_1(t) + F_2(t)$$

Lemme 0.0.3 :
$$F_1(t) \sim_{t\to+\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{-t\phi''(x_0)}} e^{t\phi(x_0)} f(x_0)$$

Démonstration. Comme $\text{supp}(\theta) \subset I$, le changement de variable $z = u(x)$ est possible et, en notant $g = u^{-1}$, $x = g(z)$ avec $g(0) = x_0$ et $g'(0) = (-\phi''(x_0)/2)^{-1/2}$. On pose $h(z) = \theta(g(z))f(g(z))g'(z)$, de sorte que $F_1(t) = e^{t\phi(x_0)} \int_{\mathbb{R}} e^{-tz^2} h(z)\, dz$.
On effectue le changement de variable $y = \sqrt{t}z$, de sorte que

$$F_1(t) = \frac{e^{t\phi(x_0)}}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} h(\frac{y}{\sqrt{t}})\, dy$$

On peut dominer $\forall y \in \mathbb{R},\ |e^{-y^2} h(\frac{y}{\sqrt{t}})| \leq ||h||_\infty e^{-y^2} \in L^1(\mathbb{R})$. Par convergence dominé, on obtient le résultat. □

Lemme 0.0.4 :

Il existe $M, \mu > 0$ tel que

$$|F_2(t)| e^{-t\phi(x_0)} \leq M e^{-t\mu}$$

Démonstration. Sur $\text{supp}(1-\theta)$, $|x - x_0| \geq \delta/2$. Comme ϕ' s'annule uniquement en x_0 et x_0 est le seul maximum, $\phi'(x) > 0$ si $x < x_0$ et $\phi' < 0$ si $x > x_0$. Ainsi, il existe $\mu > 0$ tel que $\phi(x) \leq \phi(x_0) - \mu$ (on peut prendre $\mu = \int |\phi'|$). Si $t > 1$, $t\phi(x) = \phi(x) + (t-1)\phi(x) \leq \phi(x) + (t-1)\phi(x_0) - (t-1)\mu$, de sorte que

$$|F_2(t)| e^{-t\phi(x_0)} \leq e^{-\phi(x_0) - (t-1)\mu} \int_{\mathbb{R}} e^{\phi(x)} |f(x)|\, dx$$

□

Donc $t \mapsto e^{-t\phi(x_0)} F_2(t)$ est à décroissance exponentielle, et donc négligeable par rapport à $t \mapsto e^{-t\phi(x_0)} F_1(t)$. D'où le résultat.

Application :

On a $\forall t > 0,\ \Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{t\ln(x) - x} dx = te^{t\ln(t)} \int_0^{+\infty} e^{t(\ln(y) - y)} dy$ (changement de variable $x = ty$). Alors

— $\forall t > 0, \quad \int_0^{+\infty} e^{t(\ln(y)-y)} dy < +\infty$

— $\phi(y) = \ln(y) - y$, $\phi'(y) = 1/y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$

— $f = 1$, $\phi(1) = -1$, $\phi''(1) = -1$

Le théorème donne

$$\Gamma(t) \sim_{t \to \infty} \sqrt{2\pi t} \left(\frac{t}{e}\right)^t$$