Moments et régularité de la fonction caractéristique :

Théorème : Soit X une v.a.r. dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\varphi_X = \mathbb{E}[e^{i\cdot X}]$ sa fonction caractéristique.

- Si X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$, alors φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et pour $k \in [\![1,n]\!]$ on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \int_\Omega X^k e^{itX} d\mathbb{P} = \mathbb{E}[(iX)^k e^{itX}]$.

  en particulier, $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$

- Réciproquement, si φ_X est k fois dérivable en 0 $(k \geq 2)$, X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ donnés par la formule ci-dessus.

Preuve : • Comme $\frac{d^k}{dt^k}(e^{itX}) = (iX)^k e^{itX}$, on a $\left|\frac{d^k}{dt^k}(e^{itX})\right| \leq |X|^k$

Or $\varphi_X(t) = \int_\Omega e^{itX} d\mathbb{P}$, donc si $1 \leq k \leq n$, $|X|^k$ est $\mathbb{P}$-intégrable et fournit une domination permettant d'appliquer le théorème de dérivation sous l'intégrale.

Alors $\varphi_X \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et $\underline{\varphi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall k \in [\![0,n]\!]$

• Supposons réciproquement que φ_X est k fois dérivable en 0.

Pour $k=2$: φ_X est 2 fois dérivable en 0 donc φ_X admet un DL d'ordre 2 en 0

$$\varphi_X(t) = \varphi_X(0) + t\varphi_X'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X''(0) + o(t^2)$$
$$\varphi_X(-t) = \varphi_X(0) - t\varphi_X'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi_X''(0) + o(t^2)$$

et $\frac{\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2}{t^2} \xrightarrow[t \to 0]{} \varphi_X''(0)$

Mais alors, comme $\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) = 2\mathbb{E}[\cos(tX)]$, on a $\lim_{t \to 0} \mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] = -\frac{1}{2}\varphi_X''(0)$.

On a alors, si $(t_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, $t_n \to 0$, (Fatou car positif)

$$\int_\Omega X^2 d\mathbb{P} = \mathbb{E}\left[2 \lim_{n \to +\infty} \frac{1-\cos(t_n X)}{t_n^2}\right] \leq 2 \varliminf_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(t_n X)}{t_n^2}\right] < +\infty$$

Supposons avoir démontré l'existence de tous les moments jusqu'à l'ordre $2(n-1) = 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 2$ montrons que X admet un moment d'ordre $2n = 2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$.

En utilisant le sens direct de la proposition (φ_X admet des moments jusqu'à $2(n-1)$), on a $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \varphi_X^{(2(n-1))}(t) + \varphi_X^{(2(n-1))}(-t) = 2(-1)^{n-1} \mathbb{E}[X^{2(n-1)} \cos(tX)] \\ \varphi_X^{(2(n-1))}(0) = (-1)^{n-1} \mathbb{E}[X^{2(n-1)}]. \end{cases}$$

Or φ_X étant $2n$ fois dérivable en 0, $\varphi_X^{(2(n-1))}$ est 2 fois dérivable en 0 et par Taylor-Young :

$$\frac{\varphi_X^{(2(n-1))}(t)+\varphi_X^{(2(n-1))}(-t)-2\varphi_X^{(2(n-1))}(0)}{t^2}\xrightarrow[t\to0^+]{}\varphi_X^{(2n)}(0).$$

On a donc $\mathbb{E}[X^{2n}] = 2\mathbb{E}\left[\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{1-\cos(t_pX)}{t_p^2}X^{2(n-1)}\right]$

$$\leq 2\lim_{p\to+\infty}\mathbb{E}\left[\frac{1-\cos(t_pX)}{t_p^2}X^{2(n-1)}\right] = \frac{(-1)^n}{\cancel{2}}\varphi_X^{(2n)}(0) < +\infty$$

donc X admet un moment d'ordre $2n$ ce qui conclut la preuve

Rmq : φ_X peut être dérivable en 0 sans que $X\in L^1$!

En effet, en posant $a_0=a_1=a_{-1}=0$ et $\forall h\geq 2$, $a_h=a_{-h}=\frac{c}{h^2\ln h}$ où $c=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{h\geq2}\frac{1}{h^2\ln h}\right)^{-1}$

alors $\mathbb{P}_X=\sum\limits_{h\in\mathbb{Z}}a_h\delta_h$ est une loi de proba sur $\mathbb{R}$ associée à X.

On a $\mathbb{E}[|X|]=\sum\limits_{h\in\mathbb{Z}}|h|a_h = c\sum\limits_{h\geq2}\frac{1}{h\ln h}=+\infty$ (série de Bertrand dvg)

et $\varphi_X(t)=2\sum\limits_{h\geq2}a_h\cos(ht) = \mathbb{E}[\cos(tX)]$

Alors, $0\leq\frac{1-\varphi_X(t)}{t}=\frac{1}{t}\mathbb{E}[1-\cos(tX)] = \frac{2c}{t}\sum\limits_{h\geq2}\frac{1}{h^2\ln h}(1-\cos(th))$

Prenons $0<t<1/2$ et séparons la somme suivant que $h\leq\frac{1}{t}$ ou $h\geq\frac{1}{t}$

- $\frac{1}{t}\sum\limits_{h\geq\frac1t}\frac{1}{h^2\ln h}(1-\cos(th)) \leq \frac{-2}{t\ln t}\sum\limits_{h\geq\frac1t}\frac{1}{h^2}\leq\frac{-2}{t\ln t}\int_{\lceil\frac1t\rceil-1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$ par comparaison série intégrale

  car $h\geq\frac1t$ et $x\mapsto\frac{1}{\ln x}$ ↘ ; car $x\mapsto\frac{1}{x^2}$ ↘

  $$\leq\frac{-2}{t\ln t\left(\lceil\frac1t\rceil-1\right)}\xrightarrow[t\to0^+]{}0 \quad\text{car } \left(t\left(\lceil\tfrac1t\rceil-1\right)\right)^{-1}\leq\frac{\lceil\frac1t\rceil+1}{\lceil\frac1t\rceil-1}\xrightarrow[t\to0^+]{}1$$

- $\frac{1}{t}\sum\limits_{2\leq h\leq\frac1t}\frac{1}{h^2\ln h}(1-\cos(th))\leq 2t\sum\limits_{2\leq h\leq\frac1t}\frac{1}{\ln h}\leq\frac{2t}{\ln 2}+2t\sum\limits_{3\leq h\leq\lceil\frac1t\rceil}\frac{1}{\ln h}$; $x\mapsto\frac{1}{\ln x}$ ↘

  $$\leq\frac{2t}{\ln2}+2t\int_2^{\lceil\frac1t\rceil}\frac{dx}{\ln x}=\frac{2t}{\ln 2}+2t\left(\left[\frac{x}{\ln x}\right]_2^{\lceil\frac1t\rceil}+\int_2^{\lceil\frac1t\rceil}\frac{dx}{(\ln x)^2}\right)$$

  $$\leq\underbrace{\frac{2t}{\ln 2}}_{\xrightarrow[t\to0^+]{}0}+\underbrace{2t\left(O(1)+\frac{\lceil\frac1t\rceil}{\ln\lceil\frac1t\rceil}\right)}_{\xrightarrow[t\to0^+]{}0}+2t\int_2^{\lceil\frac1t\rceil}\frac{dx}{(\ln x)^2}$$

et comme $\frac{1}{\ln^2(x)}=o\left(\frac{1}{\ln x}\right)$, par comparaison d'intégrales dvg, $\int_2^{\lceil\frac1t\rceil}\frac{dx}{\ln^2 x}=o\left(\int_2^{\lceil\frac1t\rceil}\frac{dx}{\ln x}\right)$

et donc $2t\int_2^{\lceil\frac1t\rceil}\frac{dx}{\ln x}=2t\left[\frac{x}{\ln x}\right]_2^{\lceil\frac1t\rceil}+2t\,o_{t\to0}\left(\int_2^{\lceil\frac1t\rceil}\frac{dx}{\ln x}\right)\Rightarrow 2t\int_2^{\lceil\frac1t\rceil}\frac{dx}{\ln x}\xrightarrow[t\to0^+]{}0$

et donc φ_X est dérivable en 0 car $\frac{1-\varphi_X(t)}{t}\xrightarrow[t\to0^+]{}0$.