Théorème de Plancherel :

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on pose $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$, $\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$.

Théorème: pour $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, on a $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et $\|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$

Preuve: on définit une fonction faisant le lien entre f et $\hat{f}$:

$g := f * \tilde{f}$ où $\tilde{f}(x) := \bar{f}(-x)$, i.e. pp $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\bar{f}(-y)\,dy = \langle \tau_x f, f\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$

Alors g est définie partout et même continue par continuité du p.s. et de $x \mapsto \tau_x f$.

$g(0) = \|f\|^2_{L^2}$ et $\hat{g} = |\hat{f}|^2$. $\forall x \in \mathbb{R}^N$, $|g(x)| \leq \|\tau_x f\|_{L^2} \|f\|_{L^2} < +\infty$ (CYS)

et $\|g\|_{L^1} \leq \|\tau_x f\|_{L^1} \|f\|_{L^1} < +\infty$ (Young) : $g \in L^1$ et est bornée.

On choisit $\ell \in L^1(\mathbb{R}^N)$ avec $\hat{\ell} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ (à déterminer plus tard) et on pose

$\ell_\varepsilon(x) := \ell(\varepsilon x)$ et donc $\hat{\ell}_\varepsilon(\xi) = \frac{1}{\varepsilon^N}\hat{\ell}(\xi/\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$,

On va considérer $\hat{\ell}_\varepsilon * g(0)$ pour montrer que, sous de bonnes hypothèses de ℓ, $\hat{\ell}_\varepsilon * g(0) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} g(0) = \|f\|^2_{L^2}$ et $\hat{\ell}_\varepsilon * g(0) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \ell(0)\int_{\mathbb{R}^N}\hat{g} = \ell(0)\int_{\mathbb{R}^N}|\hat{f}|^2$

• Soit $\varepsilon > 0$, $|\hat{\ell}_\varepsilon * g(0) - g(0)| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} g(-y)\hat{\ell}_\varepsilon(y)\,dy - g(0)\right|$

$$= \left|\int_{\mathbb{R}^N} (g(-y)-g(0))\hat{\ell}_\varepsilon(y)\,dy\right| \text{ dès que } \boxed{\int_{\mathbb{R}^N}\hat{\ell} = 1}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(-y)-g(0)|\,|\hat{\ell}(y/\varepsilon)|\frac{dy}{\varepsilon^N} \qquad x = \frac{y}{\varepsilon}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(-x\varepsilon)-g(0)|\,|\hat{\ell}(x)|\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0 \text{ par cvg domin}$$

car g est continue en 0 et $|g(-x\varepsilon)-g(0)|\,|\hat{\ell}(x)| \leq 2\|g\|_\infty |\hat{\ell}| \in L^1$
car g bornée et $\hat{\ell} \in L^1$

donc $\underline{\hat{\ell}_\varepsilon * g(0)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \underline{\|f\|^2_{L^2}}$

• D'abord notons que

$$\hat{\ell}_\varepsilon * g(0) = \int_{\mathbb{R}^N} g(-y)\hat{\ell}_\varepsilon(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} g(-y)\int_{\mathbb{R}^N}\ell_\varepsilon(x)e^{-ix\cdot y}\,dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} g(-y)\int_{\mathbb{R}^N}\ell_\varepsilon(x)e^{ix\cdot y}\,dx\,dy \quad \text{si } \boxed{\ell \text{ est paire}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\ell_\varepsilon(x)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} g(-y)e^{ix\cdot y}\,dy}_{=\hat{g} = |\hat{f}|^2}\,dx \quad \text{par Fubini car } g, \ell_\varepsilon \in L^1$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N}\ell_\varepsilon(x)|\hat{f}|^2(x)\,dx$$

On veut passer à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$ mais le théorème de convergence dominée ne peut s'appliquer avec la domination $|\hat{f}|^2$ car on ne sait pas encore que $\underline{\hat{f} \in L^2}$

On va utiliser Beppo-Levi.

En supposant ℓ paire et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, la suite ℓ_ε est croissante pour $\varepsilon \searrow$ et donc $(\ell_\varepsilon |\hat{g}|^2)_{\varepsilon \geq 0}$ est croissante positive, donc par Beppo-Levi :

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \hat{\ell}_\varepsilon \star g(0) = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \ell_\varepsilon(x) |\hat{f}(x)|^2 dx = \ell(0) \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{f}|^2 \quad \text{si } \ell \text{ est continue en } 0 \text{ et positive}$$

Par unicité de la limite, on a donc $\|f\|^2_{L^2} = \ell(0) \|\hat{f}\|^2_{L^2}$

Ce raisonnement est valable à condition d'exhiber une fonction ℓ satisfaisant les hypothèses : on vérifie que $\ell : x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^N} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$ est paire, décroissante sur $\mathbb{R}^+$, continue en 0 et positive

et de plus $\hat{\ell}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{2}}$ donc $\int_{\mathbb{R}^N} \hat{\ell} = 1$.

Donc la preuve est valable et comme $\ell(0) = \frac{1}{(2\pi)^N}$ on obtient bien que $(*)$ $\|\hat{f}\|^2_{L^2} = (2\pi)^N \|f\|^2_{L^2}$ et donc $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$

Corollaire : L'application $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ se prolonge en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^N)$

Preuve : $\mathcal{F}$ étant linéaire continue et $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2, $\mathcal{F}$ se prolonge de façon unique en une application continue de $L^2 \to L^2$. D'après la relation précédente $\mathcal{F}$ est une isométrie, donc est injective. Il reste à montrer la surjectivité.

Soit $Y = \{\hat{f},\ f \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$, montrons que $Y = L^2(\mathbb{R}^N)$. $Y \subset L^2$ est immédiat.

Montrons que Y est fermé dans L^2 : Soit $(g_n)_n \in Y^{\mathbb{N}}$ tq $g_n \xrightarrow{L^2} g \in L^2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \exists f_n \in L^2$ tq $g_n = \hat{f}_n$, or $(g_n)_n$ cvg donc est de Cauchy dans L^2 et donc par $(*)$, $(f_n)_n$ est également de Cauchy dans L^2, donc $f_n \to f \in L^2$ et par continuité de $\mathcal{F}$: $\hat{f}_n \to \hat{f}$ dans L^2, par unicité de la limite, $g = \hat{f}$ donc $g \in Y$: Y est fermé.

On montre maintenant que Y est dense : Soit $u \in Y^\perp$, on a $\forall \varepsilon > 0$, $\hat{\ell}_\varepsilon \star \bar{u} = 0$ et de plus $\|\hat{\ell}_\varepsilon \star \bar{u} - \bar{u}\|_{L^2} \to 0$, en effet :

$$|\hat{\ell}_\varepsilon \star \bar{u} - \bar{u}| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\bar{u}(\cdot - y) - \bar{u}(\cdot)| \hat{\ell}_\varepsilon(y) dy \quad \text{et donc}$$

$$\|\hat{\ell}_\varepsilon \star \bar{u} - \bar{u}\|^2_{L^2} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \|\tau_y \bar{u} - \bar{u}\|^2_{L^2} \frac{1}{\varepsilon^N} \hat{\ell}(y/\varepsilon) dy = \int_{\mathbb{R}^N} \|\tau_{v\varepsilon} \bar{u} - \bar{u}\|^2_{L^2} \hat{\ell}(v) dv \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$$

par cvg dominée et continuité de $x \mapsto \tau_x \bar{u}$

donc en passant à la limite : $\bar{u} = 0 \to Y^\perp = \{0\}$

$\to \mathcal{F}$ est surjective