Sous-algèbres réduites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: 108, 157, 154, 155 (157?)

Définition : Une algèbre $\mathcal{A}$ (pas forcément unitaire) est dite réduite si le seul nilpotent est 0.

Théorème : Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre réduite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $\mathcal{A}$ est codiagonalisable.

On va montrer que :

(i) On peut supposer $I_n \in \mathcal{A}$

(ii) Tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont diagonalisables

(iii) Les projecteurs de $\mathcal{A}$ engendrent $\mathcal{A}$ (en tant qu'algèbre)

(iv) $\mathcal{A}$ est commutative.

(i) : Soit $\mathcal{B} = \mathcal{A} + \mathbb{C} I_n$, $\mathcal{B}$ est une algèbre unitaire.

Si $P \in GL_n(\mathbb{C})$, alors $P\mathcal{B}P^{-1} = P\mathcal{A}P^{-1} + \mathbb{C} I_n$ donc $\mathcal{A}$ est codiago ssi $\mathcal{B}$ l'est.

Montrons que $\mathcal{B}$ est réduite :

soit $B \in \mathcal{B}$ nilpotent, $B = A + \lambda I_n$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$

si $\lambda = 0$: ok car $\mathcal{A}$ est réduite, donc $B = 0$.

sinon : notons que $AB = A^2 + \lambda A$ et comme A et B commutent, AB est nilpotente.

Or $AB \in \mathcal{A}$ donc $AB = 0$. De plus, $A = B - \lambda I_n$ avec B nilpotente et $\lambda \neq 0$

donc A est inversible donc $B = 0$.

$\to$ On peut supposer $\mathcal{A}$ unitaire

Notons que si on suppose $\mathcal{A}$ unitaire, on a le résultat de stabilité :

$\forall A \in \mathcal{A}, \forall P \in \mathbb{C}[X], P(A) \in \mathcal{A}$ ($A^k \in \mathcal{A}$: ok pour $k \geq 1$ par structure, $I_n \in \mathcal{A}$: ok car unitaire)

(ii) : Soit $A \in \mathcal{A}$, χ_A son polynôme caractéristique, alors $\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton)

et $\chi_A \in \mathbb{C}[X]$, donc est scindé : $\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$, $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ distincts, $m_i \in \mathbb{N}^*$

On pose $\mu = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$: scindé à racines simples.

Si $m = \max_{1 \leq i \leq r} m_i$, on a $\chi_A \mid \mu^m$ et donc $\mu^m(A) = 0$ i.e. $(\mu(A))^m = 0$

Or $\mathcal{A}$ étant unitaire, $\mu(A) \in \mathcal{A}$ et comme $\mathcal{A}$ est réduite, $\mu(A) = 0$

$\hookrightarrow$ A annule un polynôme scindé à racines simples : A est diagonalisable

(iii) : Soit $A \in \mathcal{A}$, d'après (ii), A est diagonalisable donc on a

$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda(A)$. Notons P_λ la matrice dans la base canonique du projecteur sur $E_\lambda(A)$ parallèlement à $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} E_\mu(A)$.

On a $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $x = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} P_\lambda x$

$\to Ax = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} A(P_\lambda x) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda x$ car $P_\lambda x \in E_\lambda(A)$.

d'où $A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda$. Reste à montrer que les P_λ sont dans $\mathcal{A}$!

On montre que $P_\lambda \in \mathbb{C}[A]$, on conclut par le fait que $\mathcal{A}$ est unitaire.

Comme $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $AP_\lambda = \lambda P_\lambda$, on a $A^k = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda^k P_\lambda$

$\rightarrow \forall Q \in \mathbb{C}[X]$, $Q(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} Q(\lambda) P_\lambda$

Si $Q_\lambda \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme d'interpolation tq $\begin{cases} Q_\lambda(\lambda) = 1 \\ Q_\lambda(\mu) = 0 \text{ si } \mu \neq \lambda \end{cases}$

On a $Q_\lambda(A) = P_\lambda$ $\rightarrow P_\lambda \in \mathbb{C}[A]$

$\rightarrow P_\lambda \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est unitaire

$\rightarrow \mathcal{A}$ est engendré par ses projecteurs

(N.B. : on a en fait montré que $\mathcal{A}$ est engendré en tant qu'espace vectoriel, ce qui est plus fort que d'être engendré en tant qu'algèbre).

(iv) : $\mathcal{A}$ est commutative : il suffit de montrer que si $A \in \mathcal{A}$ et $P \in \mathcal{A}$ est un projecteur, alors $AP = PA$, i.e. $AP - PA = 0$.

. On a $(AP - PA)P = 0$, en effet :

$(AP-PA)P = AP^2 - PAP = AP - PAP$ car P est un projecteur.

De plus, $((AP-PA)P)^2 = (AP)(AP) + (PAP)(PAP) - (AP)(PAP) - (PAP)(AP)$

$= APAP + PAPAP - APAP - PAPAP = 0$

Or $(AP-PA)P \in \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}$ est réduite donc $(AP-PA)P = 0$

$\rightarrow AP = PAP$

. On fait le même calcul pour avoir $P(AP-PA) = 0$ $\rightarrow PAP = PA$

et donc $AP = PAP = PA$

Conclusion : Tous les éléments de $\mathcal{A}$ commutent et sont diagonalisables, donc sont codiagonalisables.

Corollaire : si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors A est diagonalisable ssi $\mathbb{C}[A]$ est réduite

idée de preuve : On reprend la même démo que précédemment pour montrer que tous les éléments de $\mathbb{C}[A]$ sont diagonalisables, la commutativité étant automatique.

(MNEIMNÉ, réduction des endomorphismes)