ENS Lyon - Agrégation
2025-2026

TD : Analyse hilbertienne

Remarque : voir [1] pour encore plus d'exemples ou des indications sur les exercices.

1 Contre-exemples aux théorèmes classiques

Exercice 1 (Théorème de projection)**.**

1. Soit $H_1 = C^0([0,1];\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $L^2(0,1)$, on note
$$F = \left\{ u \in L^2(0,1)\,,\ \int_0^{\frac{1}{2}} u(t)\,\mathrm{d}t \right\} \quad \text{et} \quad F_1 = F \cap H_1\,.$$
   (a) Justifier que F_1 est un s.e.v. fermé de H_1.
   (b) Montrer que pour $u \in H_1 \setminus F_1$, $d(u, F_1) = d(u, F)$.
   (c) En déduire que $d(u, F_1)$ n'est atteinte en aucun $u \in H_1 \setminus F_1$.
2. Soit $H = L^2(0,1)$ et $F = C^0([0,1];\mathbb{R})$, justifier que pour $u \in H \setminus F$, $d(u, F) = 0$ puis qu'il n'existe aucun élément $v \in F$ tel que $\|u - v\| = 0$.

Exercice 2 (Critère de densité)**.**
On reprend les notations de l'exercice précédent. Montrer qu'on a $F_1^{\perp} = \{0\}$ mais que F_1 n'est pas dense dans H_1.

Exercice 3 (Théorème de Riesz)**.**
On reprend $H_1 = C^0([0,1];\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $L^2(0,1)$ et on définit
$$\varphi : \left| \begin{array}{l} H_1 \to \mathbb{R} \\ h \mapsto \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{array} \right.$$
Montrer que φ est une forme linéaire continue sur H_1 mais qu'il n'existe pas de $u \in H_1$ vérifiant
$$\forall h \in h_1\,,\ \langle u, h \rangle = \varphi(h)\,.$$

2 Espaces de Hilbert

Exercice 4 (Un espace pas complet [1])**.**
Soit X un espace métrique compact infini et μ une mesure de Radon positive sur X telle que $\mathrm{supp}(\mu) = X$. On munit $E = C^0(X)$ du produit scalaire
$$\langle u, v \rangle = \int_X \overline{u} v \,\mathrm{d}\mu.$$

1. Soit a un point d'accumulation de X, montrer qu'il existe une suite de boules deux à deux disjointes $B(a_n, \varepsilon_n)$ telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $\phi_n \in E$ vérifiant
$$\mathrm{supp}(\phi_n) \subset B(a_n, \varepsilon_n)\,, \qquad |\phi_n| \leqslant 1\,, \qquad \phi_n(a_n) = (-1)^n\,.$$

3. Montrer que la série $\left(\sum \phi_n\right)$ converge simplement, uniformément sur tout compact de $X \setminus \{a\}$ et dans $L^2(X)$ vers une fonction continue sur $X \setminus \{a\}$ n'admettant pas de limite en a.
4. En déduire que E n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 5 (Espace de Bergman[1])**.**
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ muni de la distance euclidienne. On note $H^2(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes (noté $H(\Omega)$) de carré intégrable muni du produit scalaire L^2

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \overline{u}(x+iy)v(x+iy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

et de la norme associée.

1. Soit $u \in H(\Omega)$, $z_\in \Omega$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(z_0, r) \subset \Omega$, montrer qu'on a

$$u(z_0) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{\overline{B}(z_0,r)} u(x+iy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

   et en déduire que si $u \in H^2(\Omega)$ on a

$$|u(z_0)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}r}\|u\|_{H^2(\Omega)}\,.$$

2. Montrer que si $K \subset \Omega$ est un compact alors pour tout $u \in H^2(\Omega)$ on a

$$\sup_{z\in K}|u(z)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}d(K, \mathbb{C}\setminus\Omega)}\|u\|_{H^2(\Omega)}\,.$$

3. Montrer que $H^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Exercice 6 (ℓ^2 à poids et Sobolev [1])**.**
Pour $a = (a_n)_n \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$ on note ℓ^2_a l'espace des suites (u_n) telles que la série $\left(\sum a_n|u_n|^2\right)$ converge muni du produit scalaire associé

$$\langle u, v\rangle = \sum_{n\geqslant 0} a_n\overline{u}_n v_n\,.$$

1. Vérifier que ℓ^2_a est bien un espace préhilbertien et justifier que l'application

$$\iota_a : u \in \ell^2_a \mapsto (\sqrt{a_n}u_n)_n \in \ell^2$$

   est une isométrie linéaire. En déduire que ℓ^2_a est un Hilbert.
2. Soient $a, b \in [0, +\infty)^{\mathbb{N}}$ vérifiant $a_n = o(b_n)$, montrer que l'injection $\ell^2_b \hookrightarrow \ell^2_a$ est compacte.
3. Soit $s \in \mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{Z}$ la mesure

$$\mu_s(n) = (1+n^2)^{\frac{s}{2}}$$

   et on note $H^s = L^2(\mu_s)$. Justifier que H^s est un espace de Hilbert et que pour $r < s$, l'injection $H^s \hookrightarrow H^r$ est compacte.

Exercice 7 (Complété hilbertien [1])**.**
Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel muni d'un semi-produit scalaire [1] $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et de la semi-norme associée $p(x) = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. On note $\hat{\mathcal{E}}$ l'espace des suites de Cauchy dans $\mathcal{E}$ pour p, i.e.

$$(x_n) \in \hat{\mathcal{E}} \qquad \text{ssi} \qquad \lim_{n,m\to+\infty} p(x_n - x_m) = 0$$

1. même définition qu'un produit scalaire, sans la propriété $\langle x, x\rangle \Rightarrow x = 0$.

et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur $\hat{\mathcal{E}}$

$$(x_n)\mathcal{R}(y_n) \qquad \text{ssi} \qquad \lim_{n\to+\infty} p(x_n - y_n) = 0\,.$$

On note E le quotient de $\hat{\mathcal{E}}$ par la relation $\mathcal{R}$ et $\Phi : \hat{\mathcal{E}} \to E$ l'application canonique associée qui à un élément de $\hat{\mathcal{E}}$ associe sa classe d'équivalence modulo $\mathcal{R}$.
L'espace E ainsi construit est appelé *complété séparé hilbertien* de $\mathcal{E}$, il est unique dans le sens précisé par le dernier point de l'exo.

1. Soient $x, y \in E$, montrer que si $\Phi\big((x_n)\big) = x$ et $\Phi\big((y_n)\big) = y$, alors la suite $\big(\langle x_n, y_n\rangle\big)_n$ est convergente et que sa limite ne dépend que de x et y.
2. Montrer que la relation
$$\langle \Phi\big((x_n)\big), \Phi\big((y_n)\big)\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y_n\rangle$$
définit bien un produit scalaire sur E. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
3. Si $x \in \mathcal{E}$, on note $\hat{x}$ l'image de la suite constante égale à x par Φ. Montrer que l'application $x \in \mathcal{E} \mapsto \hat{x} \in E$ est linéaire et que
$$\forall x \in \mathcal{E}\,,\ \|\hat{x}\| = p(x)\,.$$
4. Montrer que l'ensemble $E_0 = \{\hat{x}\,,\ x \in \mathcal{E}\}$ est dense dans E.
5. En déduire que E est un espace de Hilbert.
6. Soit $(E^{\sim}, \langle\cdot,\cdot\rangle^{\sim})$ un espace de Hilbert tel qu'il existe une application linéaire $L : \mathcal{E} \to E^{\sim}$ d'image dense dans $E^{\sim}$ et vérifiant
$$\forall x \in \mathcal{E}\,,\ \|L(x)\|^{\sim} = p(x)\,.$$
Montrer qu'il existe une isométrie surjective $\iota : E \to E^{\sim}$ telle que $\forall x \in \mathcal{E}\,,\ \iota(\hat{x}) = L(x)$.

3 Théorème de projection

Exercice 8 (Caractérisation des projecteurs orthogonaux[1])**.**
Soit H un espace de Hilbert et $P : H \to H$ linéaire et continue.

1. Montrer que P est un projecteur orthogonal sur un s.e.v. fermé de H si et seulement si $P^2 = P$ et $\|P\| \leqslant 1$.
2. Montrer que si P est un projecteur orthogonal alors
$$\forall x, y \in H\,,\ \langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle$$

Exercice 9 (Union et intersection de convexes [1])**.**
Soit H un espace de Hilbert.

1. Soient $C_1 \subset C_2$ des parties convexes fermées non-vides de H. Montrer qu'on a
$$\forall x \in H\,,\ \|P_{C_1}(x) - P_{C_2}(x)\|^2 \leqslant 2\big(d(x, C_1)^2 - d(x, C_2)^2\big)\,.$$
2. Soient $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$ une suite croissante de convexes fermés non-vides de H, on note $C = \overline{\bigcup_{n\geqslant 1} C_n}$ l'adhérence de leur union.
   (a) Montrer que C est un convexe fermé.
   (b) Montrer que pour tout vecteur $x \in H$ on a
   $$\lim_{n\to+\infty} d(x, C_n) = d(x, C)$$
   et en déduire que $P_{C_n}(x) \to P_C(x)$ quand $n \to +\infty$.

3. Soient $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ une suite décroissante de convexes fermés non-vides de H, on note $C = \bigcup_{n \geqslant 1} C_n$ leur intersection.
   (a) Montrer que si C n'est pas vide alors
   $$\forall x \in H\,, \quad \lim_{n \to +\infty} P_{C_n}(x) = P_C(x)\,.$$
   (b) Montrer que si C est vide alors
   $$\forall x \in H\,, \quad \lim_{n \to +\infty} d(x, C_n) \to +\infty\,.$$
   (c) En déduire que si l'un des C_n est borné, alors C n'est pas vide.
   (d) Montrer que ce dernier résultat est faux dans un espace de Banach général (on prendra $E = C^0([0,1])$ et $C_n = \{u \in E\,,\ \mathrm{supp}(u) \subset [0, \frac{1}{n}]\,,\ |u| \leqslant 1\,,\ u(0) = 1\}$).

Exercice 10 (Sous-espace dense de L^2 [1])**.**
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_n$ une suite de parties mesurables formant une partition de Ω. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note
$$E_n = \left\{ u \in L^2(\Omega)\,,\ \int_{\Omega \setminus A_n} |u| \,\mathrm{d}\mu \right\}.$$
Montrer que les E_n sont deux à deux orthogonaux et que leur réunion engendre un sous-espace dense de $L^2(\Omega)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, expliciter la projection orthogonale sur E_n.

Exercice 11 (Cadre général pour les contre-exemples [1])**.**
On reprend les notations de l'exercice 4. Soit A une partie fermée de X, on note $E_A = \big\{ u \in C^0(X)\,,\ f_{|A} = 0 \big\}$.
1. Montrer qu'il existe une suite croissante de fonctions (u_n) de E_A telle que $\mathrm{supp} u_n = \overline{X \setminus A}$ et (u_n) converge simplement vers $\mathbf{1}_{X \subset A}$.
2. Montrer que $(E_A)^\perp = E_{\overline{X \setminus A}}$.
3. Soit $u \in C^0(X)$. Montrer que
   $$d(u, E_A)^2 = \int_{X \setminus A} |u|^2 \,\mathrm{d}\mu\,.$$
   En déduire que E_A est dense dans E si et seulement si A est de mesure nulle. Montrer que u admet une projection sur E_A si et seulement si u s'annule sur le bord de A.
4. On suppose que X n'a pas de point isolé. Montrer qu'il existe un fermé A de X d'intérieur vide et de mesure positive. Montrer qu'alors $(E_A)^\perp = \{0\}$ mais E_A n'est pas dense dans E.

Exercice 12 (Théorème des bipolaires [1])**.**
Soit H un espace de Hilbert complexe. On définit l'ensemble polaire d'une partie non vide A de H par
$$A^0 = \{x \in H\,,\ \forall y \in H\,,\ \mathrm{Re}\langle x, y\rangle \leqslant 1\}$$
et on appelle A^{00} le bipolaire de A.
1. Soit $A \subset H$ non vide, montrer que A^0 est un convexe fermé contenant 0.
2. En déduire que si $A \subset H$ est non vide alors $\overline{\mathrm{Conv}(A \cup \{0\})}$ (enveloppe convexe fermée de $A \cup \{0\}$) est contenue dans A^{00}.
3. On montre maintenant l'inclusion inverse. Soit $C = \overline{\mathrm{Conv}(A \cup \{0\})}$ et $x \in A^{00}$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Re}\langle x - P_C(x), P_C(x)\rangle \geqslant 0$.
   (b) Montrer que pout tout $\varepsilon > 0$,
   $$\frac{1}{\varepsilon + \mathrm{Re}\langle x - P_C(x), P_C(x)\rangle}(x - P_C(x)) \in A^0\,,$$
   en déduire que $\|x - P_C(x)\|^2 \leqslant \varepsilon$ et donc que $x \in C$.
4. Soit $A \subset E$ une partie convexe contenant 0. Montrer que $\overline{A} = A^{00}$.
5. Soit A un s.e.v. de E. Montrer que $A^0 = A^\perp$.

4 Opérateurs

Exercice 13 (Théorème de Stampacchia [1]).
Soit C un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert réel H, a une forme bilinéaire symétrique continue et coercive sur H, et $\varphi \in H'$. Soit J définie sur H par

$$\forall x \in H\,,\ J(u) = a(u,u) - 2\varphi(u)\,.$$

Montrer qu'il existe un unique $c \in C$ tel que pour tout $v \in C$, $J(c) \leqslant J(v)$ et que de plus c est caractérisé par

$$\forall v \in C\,,\ a(c, v-c) \geqslant \varphi(v-c)\,.$$

On pourra d'abord appliquer Lax-Milgram pour représenter φ par la forme bilinéaire a et travailler sur l'espace de Hilbert (H, a).

Exercice 14 (Adjoint et orthogonalité [1]).
Soient H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(T^*) = (\mathrm{Im}(T))^{\perp}$. En déduire $(\mathrm{Ker}(T^*))^{\perp} = \overline{\mathrm{Im}(T)}$ puis que T est injectif si et seulement si $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans H.
2. On suppose T autoadjoint positif. Montrer que $x \in \mathrm{Ker}(T)$ si et seulement si $\langle Tx, x\rangle = 0$. En déduire que T est injectfi si et seulement si $\langle Tx, x\rangle > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Exercice 15 (Théorème ergodique [1]).
Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|T\| \leqslant 1$.

1. Montrer que, pour $x \in H$, $x = Tx$ si et seulement si $\langle Tx, x\rangle = \|x\|^2$. En déduire que $\mathrm{Ker}(Id - T) = \mathrm{Ker}(Id - t^*)$.
2. Montrer que $(\mathrm{Im}(Id-T))^{\perp} = \mathrm{Ker}(Id-T)$ et en déduire
$$H = \mathrm{Ker}(Id-T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(Id-T)}\,.$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note
$$T_n = \frac{Id + T + \cdots + T^n}{n+1}\,.$$
Montrer que pour tout $x \in H$ on a $T_n x \to Px$ où P est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(Id - T)$

5 Bases hilbertiennes

Exercice 16 (Sous-espace en fréquences [1]).
Soit $A \subset \mathbb{Z}$ et E_A le sous espace vectoriel de $L^2(0, 2\pi)$ défini par

$$E_A = \left\{ u \in L^2(0,2\pi)\,,\ \forall n \in A\,,\ \int_0^{2\pi} u(t) e^{-int}\,\mathrm{d}t = 0 \right\}\,.$$

1. Montrer que E_A est fermé et en déterminer une base hilbertienne.
2. Déterminer le supplémentaire orthogonal de E_A et expliciter le projecteur orthogonal sur E_A.

Exercice 17 (Polynômes de Legendre [1]).
Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit le polynôme P_n par

$$\forall x \in [-1,1]\,,\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2-1)^n \right)\,.$$

1. Montrer que la famille $\left(\sqrt{n+1} P_n\right)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(-1,1)$.

2. En déduire une forme explicite du projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}_n[x]$ (l'espace des fonctions polynomiales de degré au plus n).

Exercice 18 (Inégalités de Poincaré [1])**.**

1. Soit $u \in C^1([0,1];\mathbb{C})$ vérifiant $u(0) = u(1)$. En utilisant l'inégalité de Bessel et une base hilbertienne bien choisie de $L^2(0,1)$, montrer que

$$\int_0^1 |u|^2 \,\mathrm{d}x - \left|\int_0^1 u \,\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

avec égalité si et seulement si u est de la forme $u(x) = \lambda + \mu e^{2i\pi x} + \nu e^{-2i\pi x}$ avec $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

2. Soit $u \in C^1([0,1];\mathbb{C})$, en considérant la fonction $\tilde{u}$ définie par

$$\tilde{u}(x) = \left| \begin{array}{l} u(x) \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(-x) \text{ si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \end{array} \right.$$

montrer que

$$\int_0^1 |u|^2 \,\mathrm{d}x - \left|\int_0^1 u \,\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 |u'(x)|^2 \,\mathrm{d}x$$

avec égalité si et seulement si u est de la forme $u(x) = \lambda + \mu\cos(\pi x)$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

3. Soit $u \in C^2([0,1];\mathbb{C})$ vérifiant $u(0) = u(1) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 |u'|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 |u''|^2 \,\mathrm{d}x$$

avec égalité si et seulement si u est de la forme $u(x) = \lambda \sin(\pi x)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

4. Soit $u \in C^1([0,1];\mathbb{C})$ vérifiant $u(0) = u(1) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 |u|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 |u'|^2 \,\mathrm{d}x$$

avec égalité si et seulement si u est de la forme $u(x) = \lambda \sin(\pi x)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice 19 (Un espace de Hilbert pas séparable [1])**.**

1. Soient D une partie dense et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormée d'un espace préhilbertien E. Montrer qu'il existe une surjection de D sur I. En déduire que toutes les familles orthonormées d'un espace préhilbertien séparable sont dénombrables.
2. Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel engendré par les $e_r : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{irx}$, $r \in \mathbb{R}$.
   (a) Pour $u, v \in \mathcal{E}$, on note

   $$\langle u, v\rangle = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \overline{u}(t)v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

   Montrer qu'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.
   (b) Montrer que $(e_r)_{r\in\mathbb{R}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{E}$ n'est pas séparable.
   (c) On note E le complété hilbertien de $\mathcal{E}$ (c.f. exo 7). Montrer que la famille $(\hat{e}_r)_{r\in\mathbb{R}}$ est une base hilbertienne de E (en reprenant la notation de l'exo 7) et qu'il existe une isométrie surjective de E sur $\ell^2(\mathbb{R})$.

Références

[1] F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle.*