Théorème de Wantzel:

Théorème: Soit $M=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, M est constructible à partir de $\{(0,0),(1,0)\}$ ssi il existe une suite finie de sous-corps de $\mathbb{R}$ tq

$$\begin{cases} K_0 = \mathbb{Q} \\ \forall i\in\{1,\dots,p\},\ [K_i : K_{i-1}] = 2 \\ (x,y)\in (K_p)^2 \end{cases}$$

Preuve:

$\Rightarrow$) Soit M constructible en p pas depuis $\{(0,0),(1,0)\} = A_0$ et notons $A_0 \subset \dots \subset A_p$ telle que $M\in A_p$ et $A_i = A_{i-1}\cup\{M_i\}$ où M_i est constructible en un pas depuis A_{i-1}. On note alors $(x_i;y_i)$ les coordonnées de M_i et K_i le sous-corps de $\mathbb{R}$ engendré par les coordonnées des points de A_i sur $\mathbb{Q}$.

Alors par définition on a $\forall i\in\{1,\dots,p\}$, $K_i = K_{i-1}(x_i, y_i)$

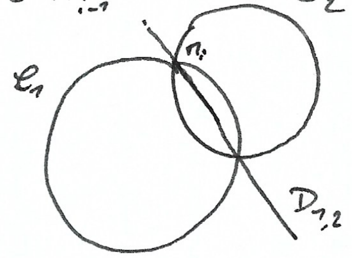
Or M_i est obtenu comme intersection de droites et cercles donc $(x_i;y_i)$ vérifie deux équations de degré ≤ 2 à coefficients dans K_{i-1}

Donc $[K_i : K_{i-1}] = [K_{i-1}(x_i,y_i) : K_{i-1}(x_i)]\,[K_{i-1}(x_i) : K_{i-1}] \in \{1,2,4\}$

Avec égalité à 4 seulement si M est intersection de 2 cercles.

Or l'intersection de 2 cercles équivaut à l'intersection d'un cercle et d'une droite :

$$\begin{cases} x^2+y^2+a_1x+b_1y=c_1 \\ x^2+y^2+a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad \text{avec } a_1,b_1,c_1,\ a_2,b_2,c_2 \in K_{i-1}$$



$$\iff \begin{cases} x^2+y^2+a_1x+b_1y=c_1 \\ (a_2-a_1)x+(b_2-b_1)y=c_2-c_1 \end{cases} \quad \text{où } (a_2-a_1),(b_2-b_1),(c_2-c_1)\in K_{i-1}$$

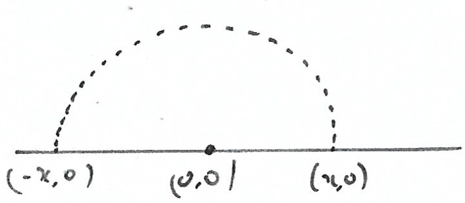
donc en fait on a $[K_i : K_{i-1}] \in \{1,2\}$

En excluant les extensions superflues (i.e. telles que $[K_i : K_{i-1}]=1$) on obtient le résultat.

$\Leftarrow$) On commence par montrer le résultat suivant:

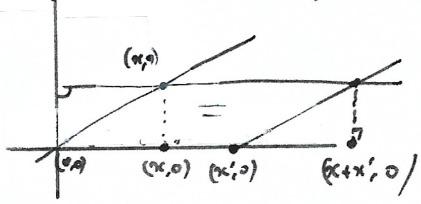
Proposition: Soit $\mathbb{E} := \{t\in\mathbb{R},\ t \text{ constructible}\}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, stable par racine carrée.

preuve: Par définition, on a 0 et $1\in\mathbb{E}$. On montre que si $x,x'\in\mathbb{E}$
$$\begin{cases} -x\in\mathbb{E}, \quad x+x'\in\mathbb{E} \\ xx'\in\mathbb{E}, \quad \text{si } x\neq 0,\ \frac{1}{x}\in\mathbb{E} \\ \text{si } x^2\in\mathbb{E},\ \sqrt{x^2}\in\mathbb{E} \end{cases}$$



$-x\in\mathbb{E}$

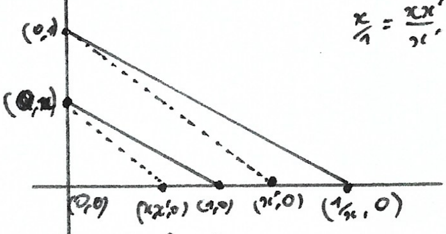
(On sait construire les parallèles)



$x+x'\in\mathbb{E}$

Thalès : $\frac{1}{x} = \frac{1/x}{1}$

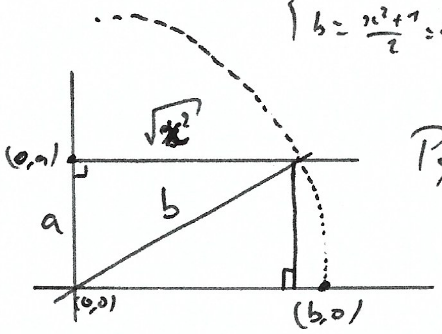
$\frac{x}{1} = \frac{xx'}{x'}$



$xx'\in\mathbb{E}$ $\quad \frac{1}{x}\in\mathbb{E}$

Si $x^2 \in \mathbb{E}$, on pose $\begin{cases} a = \frac{x^2-1}{2} \\ b = \frac{x^2+1}{2} = a+1 \end{cases} \in \mathbb{E}$ alors $(b+a)(b-a) = b+a = x^2 = b^2-a^2$

$\rightarrow b^2 = x^2 + a^2$



Pythagore donne $\sqrt{x^2} \in \mathbb{E}$.

On termine la preuve du théorème :

Soit $M = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $K_0, \dots, K_p$ une tour d'extensions quadratiques comme dans le théorème. On montre que $\forall i \in [\![0;p]\!]$, $K_i \subset \mathbb{E}$:

$K_0 = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{E}$: ok

Si $K_{i-1} \subset \mathbb{E}$: alors si $x \in K_i$, comme $[K_i : K_{i-1}] = 2$, $\exists (\alpha, \delta) \in K_{i-1}^2$

tq $\Pi_{x, K_{i-1}}(X) = (X-\alpha)^2 - \delta$

- Si $\delta = 0$: on a $x = \alpha \in K_i \subset \mathbb{E}$ donc $x \in \mathbb{E}$
- Sinon : $\delta > 0$ car $x \in \mathbb{R}$ et alors $(x-\alpha)^2 = \delta \in \mathbb{E}$

  donc par ce qui précède $x - \alpha \in \mathbb{E}$ puis $x \in \mathbb{E}$.

donc $K_i \subset \mathbb{E}$.

Toutes les extensions sont constituées de points constructibles.

En particulier $K_p \subset \mathbb{E}$ et $M \in (K_p)^2$: M est constructible.