

Intégrales à paramètres, distributions, espace de Schwartz et EDP

Hugo Eulry

Résumé

On rassemble dans ces notes de cours l'essentiel de ce qu'il faut savoir des distributions dans le cadre de l'agrégation. Une partie d'introduction est dédiée à l'étude des intégrales à paramètres où on rappelle les théorèmes fondamentaux de régularité ainsi que les deux méthodes populaires d'analyse asymptotique que sont la méthode de Laplace et celle de la phase stationnaire. Concernant les distributions, l'accent est mis sur l'espace de Schwartz et les distributions tempérées pour leur comportement vis-à-vis de la transformée de Fourier. On s'attarde également sur les théorèmes de Paley-Wiener qui éclairent un peu plus le fait général : localisation en espace = régularité en fréquence. On termine enfin sur la construction des espaces de Sobolev et une brève application à l'étude d'EDP classiques.

Table des matières

1	Intégrales à paramètres	1
2	Fonctions lisses et distributions	11
3	Distributions tempérées et espace de Schwartz	24
4	Les théorèmes de Paley-Wiener	29
5	Espaces de Sobolev et problèmes elliptiques	32

1 – Intégrales à paramètres

On s'intéresse dans cette section au comportement de fonctions données comme une intégrale dépendant d'un paramètre

$$F(t) = \int_X f(t, x) dx$$

Exemples 1.

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$$

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx$$

On rappelle les théorèmes fondamentaux de régularité puis on s'intéresse à 2 méthodes d'analyse asymptotique pour des cas particuliers d'intégrande.

1.1 – Régularité sous l'intégrale

On fixe dans cette partie un espace mesuré (X, \mathcal{F}, μ) . On a le théorème fondamental suivant :

Théorème 2 (Convergence dominée). Soient $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ et $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions mesurables telles que :

- p.p. $x \in X$, $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$
 - $\exists g \in L^1(X)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, p.p. $x \in X$, $|f_n(x)| \leq g(x)$
- alors $f \in L^1(X)$ et

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_X f(x) d\mu(x)$$

Dont on déduit les théorèmes de régularité.

Théorème 3 (Continuité sous l'intégrale). Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \times X \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que

- p.p. $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est continue
- $\forall t \in I$, $f(t, \cdot)$ est mesurable
- $\exists g \in L^1(X)$, $\forall t \in I$, p.p. $x \in X$, $|f(t, x)| \leq g(x)$

alors $F : t \in I \mapsto \int_X f(t, x) d\mu(x)$ est bien définie sur I et est continue.

Théorème 4 (Dérivabilité sous l'intégrale). Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \times X \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que

- p.p. $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est dérivable sur I
- $\forall t \in I$, $f(t, \cdot)$ est intégrable
- $\forall t \in I$, $\partial_t f(t, \cdot)$ est mesurable
- $\exists g \in L^1(X)$, $\forall t \in I$, p.p. $x \in X$, $|\partial_t f(t, x)| \leq g(x)$

alors $F : t \in I \mapsto \int_X f(t, x) d\mu(x)$ est bien définie sur I et est dérivable de dérivée

$$F'(t) = \int_X \partial_t f(t, x) d\mu(x)$$

Théorème 5 (C^k sous l'intégrale). Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \times X \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que

- p.p. $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est C^k sur I
- $\forall 0 \leq j < k$, $\forall t \in I$, $\partial_t^j f(t, \cdot)$ est intégrable
- $\forall t \in I$, $\partial_t^k f(t, \cdot)$ est mesurable
- $\exists g \in L^1(X)$, $\forall t \in I$, p.p. $x \in X$, $|\partial_t^k f(t, x)| \leq g(x)$

alors $F : t \in I \mapsto \int_X f(t, x) d\mu(x)$ est bien définie sur I et est C^k de dérivées successives

$$F^{(j)}(t) = \int_X \partial_t^j f(t, x) d\mu(x) \text{ pour } 0 \leq j \leq k$$

Remarque :

- on adapte sans problèmes les théorèmes précédents au cas où l'espace d'arrivée est un espace vectoriel normé de dimension finie. Idem en remplaçant I par un ouvert d'un espace vectoriel normé de dimension finie.
- pour la dérivation et le caractère C^k notez qu'on a besoin de la domination uniquement sur l'ordre le plus élevé.

Dans le cas d'une fonction de la variable complexe, on a également un théorème d'holomorphicité.

Théorème 6 (Holomorphicité sous l'intégrale). Soient U un ouvert de \mathbb{C} , et $f : U \times X \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que

- p.p. $x \in X$, $f(\cdot, x)$ est holomorphe sur U
- $\forall z \in U$, $f(z, \cdot)$ est mesurable

— $\exists g \in L^1(X)$, $\forall z \in U$, p.p. $x \in X$, $|f(z, x)| \leq g(x)$
alors $F : z \in U \mapsto \int_X f(z, x) d\mu(x)$ est bien définie sur U et est holomorphe avec

$$F'(z) = \int_X \partial_z f(z, x) d\mu(x)$$

Remarque : Contrairement aux théorèmes de dérivation réels, on a uniquement besoin d'une domination sur f pour conclure à l'holomorphie !

Exemples 7. En reprenant les exemples précédent :

— $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \Gamma^{(k)}(t) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^k x^{t-1} e^{-x} dx$$

— $\zeta \in C^\infty((1, +\infty))$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \zeta^{(k)}(s) = \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^k (\ln n)^k}{n^s}$$

— pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tels que $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\partial^\alpha \mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (-ix)^\alpha f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

— Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{\operatorname{Re}(z) > 0\}$

— ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\{\operatorname{Re}(z) > 1\}$

Il est parfois délicat d'obtenir une domination uniforme en le paramètre sur tout l'espace où il évolue. Notez que les propriétés de dérivation/holomorphie sur un ouvert sont équivalentes à l'être sur tout compact inclu dans cet ouvert, ce qui en pratique simplifie grandement la recherche d'un chapeau intégrateur. On illustre ce fait par un exemple bien connu.

Proposition 8. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ à support compact, alors $\mathcal{F}f$ se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} .

Démonstration : Posons $g : (z, x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mapsto f(x)e^{-ixz}$, on montre que

$$G : z \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(z, x) dx$$

est holomorphe sur \mathbb{C} . Comme G et \mathcal{F} coïncident sur \mathbb{R} , on aura le résultat par prolongement analytique.

Soient $a > 0$ tel que $\operatorname{supp}(f) \subset (-a, a)$ et fixons $R > 0$, alors

- $\forall z \in B(0, R)$, $g(z, \cdot)$ est mesurable
- p.p. $x \in \mathbb{R}$, $g(\cdot, x)$ est holomorphe
- pour $z \in B(0, R)$ et p.p. $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} |g(z, x)| &= |f(x)e^{-ixz}| \\ &\leq |f(x)|e^{\operatorname{Im}(z)x} \\ &\leq |f(x)|e^{Ra} \end{aligned}$$

La dernière majoration étant uniforme en $z \in B(0, R)$, l'intégrabilité de f assure que G est bien une fonction holomorphe sur $B(0, R)$.

$R > 0$ étant arbitraire, G ainsi définie est holomorphe sur \mathbb{C} .

□

1.2 – Méthode de Laplace

On s'intéresse dans cette section au comportement quand $t \rightarrow +\infty$ de fonctions de la forme

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx$$

Si φ admet un unique minimum en $x_0 \in (a, b)$, seule la contribution de $\varphi(x_0)$ va compter quand $t \rightarrow +\infty$. En effet, de façon heuristique, comme

$$e^{-t\varphi(x)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\ll} e^{-t\varphi(x_0)} \quad \text{pour } x \neq x_0$$

et en développant φ au voisinage de x_0

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) \\ &\approx \varphi(x_0) + \frac{1}{2}\varphi''(x_0)(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

où $\varphi''(x_0) > 0$ car $\varphi(x_0)$ est un minimum. On a alors

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx &\approx e^{-t\varphi(x_0)} f(x_0) \int_a^b e^{-\frac{t}{2}\varphi''(x_0)(x-x_0)^2} dx \\ &\approx e^{-t\varphi(x_0)} f(x_0) \sqrt{\frac{2}{t\varphi''(x_0)}} \int_{\sqrt{\frac{t\varphi''(x_0)}{2}}(a-x_0)}^{\sqrt{\frac{t\varphi''(x_0)}{2}}(b-x_0)} e^{-y^2} dy \\ &\approx e^{-t\varphi(x_0)} f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{t\varphi''(x_0)}} \end{aligned}$$

On rend précise l'heuristique précédente avec le théorème suivant.

Théorème 9 (Méthode de Laplace). Soient $a < b \leq +\infty$, $\varphi \in C^2([a, b], \mathbb{R})$ et $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en a et qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \mapsto e^{-t_0\varphi(x)} f(x) \quad \text{est intégrable sur } (a, b)$$

On suppose de plus que

$$\varphi'(a) = 0, \quad \varphi'(x) > 0 \text{ pour } x > a, \quad \varphi''(a) > 0 \text{ et } f(a) \neq 0$$

Alors on a l'équivalent suivant quand $t \rightarrow +\infty$

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e^{-t\varphi(a)} f(a) \sqrt{\frac{\pi}{2t\varphi''(a)}}$$

Démonstration : Dans un premier temps, on s'assure que l'intégrale fait sens pour t assez grand. En effet, si $t > t_0$ on a

$$\left| e^{-t\varphi(x)} f(x) \right| = e^{-(t-t_0)\varphi(x)} e^{-t_0\varphi(x)} |f(x)| \leq e^{-(t-t_0)\varphi(a)} e^{-t_0\varphi(x)} |f(x)|$$

où le terme de droite est intégrable par hypothèse.

On traite ensuite un cas particulier : $a = 0$ et $\varphi(x) = x^2$.

La continuité de f en 0 assure que

$$\forall \delta > 0, \exists M > 0, |f(x)| \leq M$$

Fixons alors un tel $\delta > 0$ assez petit, on a

$$\int_0^b e^{-tx^2} f(x) dx = \int_0^\delta e^{-tx^2} f(x) dx + \int_\delta^b e^{-tx^2} f(x) dx$$

Pour la première intégrale, le changement de variable $y = \sqrt{t}x$ donne

$$\int_0^\delta e^{-tx^2} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^{\sqrt{t}\delta} e^{-y^2} f(t^{-\frac{1}{2}}y) dy$$

L'hypothèse en 0 sur f assure que, par convergence dominée, l'intégrale de droite converge vers

$$f(0) \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$$

Pour la deuxième intégrale, une majoration grossière donne

$$\left| \int_\delta^b e^{-tx^2} f(x) dx \right| \leq e^{-(t-t_0)\delta^2} \int_\delta^b e^{-t_0x^2} |f(x)| dx = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

et on obtient bien

$$\int_0^b e^{-tx^2} f(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} f(0) \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$$

Pour le cas général, les hypothèses sur φ assurent que φ est un C^1 difféomorphisme croissant de (a, b) sur $(\varphi(a), \varphi(b))$. Posons le changement de variable $y = \psi(x)$ où

$$\psi(x) = \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}$$

Notons qu'on a

$$\psi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}}$$

et en $x = a$

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \frac{\varphi'(a) + \varphi''(a)(x-a) + o((x-a))}{2\sqrt{\varphi'(a)(x-a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)}} \\ &= \frac{\varphi''(a)(x-a) + o((x-a))}{2\sqrt{\frac{1}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)}} \\ &\underset{x \rightarrow a}{\sim} \sqrt{\frac{\varphi''(a)}{2}} \end{aligned}$$

de sorte que ψ est également un C^1 difféo croissant de (a, b) et que ψ' se prolonge par continuité en a . On a donc par changement de variable

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx &= \int_0^{\sqrt{\varphi(b)-\varphi(a)}} e^{-t(y^2+\varphi(a))} f(\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a))) \frac{2y dy}{\varphi'(\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a)))} \\ &= 2e^{-t\varphi(a)} \int_0^{\sqrt{\varphi(b)-\varphi(a)}} e^{-ty^2} f(\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a))) \frac{y dy}{\varphi'(\varphi^{-1}(y^2+\varphi(a)))} \end{aligned}$$

En posant $g(y) := f(\varphi^{-1}(y^2 + \varphi(a))) \frac{y}{\varphi'(\varphi^{-1}(y^2 + \varphi(a)))}$ on est ramené au cas précédent et on a alors

$$\int_0^{\sqrt{\varphi(b)-\varphi(a)}} e^{-ty^2} g(y) dy \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} g(0) \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$$

où $g(0) = \frac{f(a)}{2\psi'(a)} = \frac{f(a)}{\sqrt{2\varphi''(a)}}$ de sorte que finalement

$$\int_a^b e^{-t\varphi(x)} f(x) dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} f(a) e^{-t\varphi(a)} \sqrt{\frac{\pi}{2t\varphi''(a)}}$$

□

Remarque : La démonstration s'adapte de façon identique au cas où φ atteint son maximum en b .

On passe facilement du cas où le minimum est atteint à l'intérieur de l'intervalle au cas ci-dessus avec la relation de Chasles, on récupère alors exactement la formule donnée par l'heuristique plus haut.

On donne une application directe de cette asymptotique dans le cadre de la fonction Γ .

Proposition 10 (Formule de Stirling).

$$\Gamma(t+1) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t}$$

Démonstration : Γ est bien définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} dx$$

on cherche un équivalent de $\Gamma(t+1)$ en $+\infty$. En posant $x = t(u+1)$ on a

$$\begin{aligned} \Gamma(t+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} x^t dx \\ &= t \int_{-1}^{+\infty} e^{-t(u+1)} (t(u+1))^t du \\ &= t^{t+1} \int_{-1}^0 e^{-t(u+1)} (u+1)^t du + t^{t+1} \int_0^{+\infty} e^{-t(u+1)} (u+1)^t du \end{aligned}$$

En posant $\varphi(u) = u+1 - \ln(u+1)$, φ satisfait bien les hypothèses du théorème précédent de sorte que

$$\int_{-1}^0 e^{-t(u+1)} (u+1)^t du \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t(u+1)} (u+1)^t du \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} e^{-t}$$

de sorte que finalement

$$\Gamma(t+1) \underset{t \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t}$$

□

1.3 – Méthode de la phase stationnaire

La section précédente permet d'estimer des intégrales dont l'intégrande n'est significative qu'en un seul point. On s'intéresse ici au cas d'une exponentielle complexe et donc d'une intégrande fortement oscillante. C'est à dire

$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x) dx$$

En menant une heuristique similaire, on identifie que seules les contributions où la phase $\varphi(x)$ est stationnaires comptent dans l'intégrale, grossièrement la partie de l'intégrale où la phase "tourne le moins vite". On commence par deux lemmes.

Lemme 11 (Phase non stationnaire). Soient $a < b$, $\varphi \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ telle que $\varphi' \neq 0$ sur $[a, b]$ et $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. Alors

$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x) dx = \mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \right)$$

Démonstration : Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x) dx &= \int_a^b e^{it\varphi(x)} \varphi'(x) \frac{f(x)}{\varphi'(x)} dx \\ &= \left[\frac{1}{it} e^{it\varphi(x)} \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \right]_a^b - \frac{1}{it} \int_a^b e^{it\varphi(x)} \left(\frac{f}{\varphi'} \right)'(x) dx \end{aligned}$$

par hypothèse sur f et φ , la dernière intégrale est bornée uniformément en t et on obtient la majoration. □

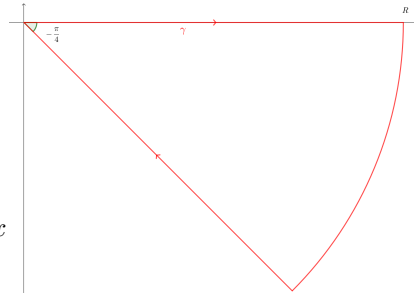
Remarque : Si de plus f s'annule aux bords et est plus régulière, on peut itérer la démonstration précédente et obtenir une majoration en $\frac{1}{t^N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Lemme 12 (Intégrale de Fresnel).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm ix^2} dx = \sqrt{\pi} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}$$

Démonstration : On traite le cas +, l'autre cas s'obtient de façon analogue.

Soit $R > 0$ et γ le contour défini sur la figure. La fonction $z \mapsto e^{-z^2}$ est holomorphe sur \mathbb{C} , on a donc



$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} e^{-z^2} dz \\ &= \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{-R}^0 e^{-(-xe^{-i\frac{\pi}{4}})^2} (-e^{-i\frac{\pi}{4}}) dx \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(Re^{-i\theta})^2} (-iRe^{-i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

La première intégrale est l'intégrale de Gauss

$$\int_0^R e^{-x^2} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

La deuxième est celle qui nous intéresse (à un facteur près)

$$\int_{-R}^0 e^{-(-xe^{-i\frac{\pi}{4}})^2} (-e^{-i\frac{\pi}{4}}) dx = e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{-R}^0 e^{ix^2} dx$$

Concernant la dernière intégrale, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-(Re^{-i\theta})^2} (-iRe^{-i\theta}) d\theta \right| &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos(2\theta)} R d\theta \\ &\leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} (R^2 \cos(2\theta))^{\frac{1}{2}} e^{-R^2 \cos(2\theta)} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta \end{aligned}$$

Comme $X \mapsto X^\alpha e^{-X}$ est bornée uniformément en $X \in \mathbb{R}_+$ pour tout $\alpha \geq 0$ et $\theta \mapsto \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$ est intégrable sur $(0, \frac{\pi}{4})$, le second membre tend vers 0 quand $R \rightarrow +\infty$ par convergence dominée. On a alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

et on conclut par parité de $x \mapsto e^{ix^2}$.

□

On a alors tous les outils en mains pour montrer le théorème suivant.

Théorème 13 (Méthode de la phase stationnaire). Soient $a < b$ et $f, \varphi \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que φ' s'annule en un unique $x_0 \in (a, b)$, alors

$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x) dx = f(x_0) e^{it\varphi(x_0)} e^{i \operatorname{sgn}(\varphi''(x_0)) \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{t|\varphi''(x_0)|}} + \mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \right)$$

Démonstration : Soit $\delta > 0$ suffisamment petit, on a par le lemme de la phase non stationnaire

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x) dx &= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{it\varphi(x)} f(x) dx + \int_a^{x_0-\delta} e^{it\varphi(x)} f(x) dx + \int_{x_0+\delta}^b e^{it\varphi(x)} f(x) dx \\ &= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{it\varphi(x)} f(x) dx + \mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \right) \end{aligned}$$

Comme φ est de classe C^2 avec $\varphi'(x_0) = 0$, il existe une fonction ρ de classe C^∞ telle que $\rho(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow x_0$ et

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \frac{1}{2} \varphi''(x_0) (x - x_0)^2 (1 + \rho(x))$$

On pose alors le changement de variable $y = \psi(x)$ où

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{|\varphi''(x_0)|}{2}} (x - x_0) \sqrt{1 + \rho(x)}$$

On a

$$\psi(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} \sqrt{\frac{|\varphi''(x_0)|}{2}} (x - x_0)$$

et

$$\psi'(x_0) = \sqrt{\frac{|\varphi''(x_0)|}{2}}$$

de sorte que, si δ est assez petit, ψ définit bien un C^1 difféomorphisme de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sur un intervalle (A, B) contenant 0. On a alors

$$\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{it\varphi(x)} f(x) dx = \int_A^B e^{it\varphi(\psi^{-1}(y))} f(\psi^{-1}(y)) \left| \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(y))} \right| dy$$

On pose comme précédemment

$$g(y) = f(\psi^{-1}(y)) \left| \frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(y))} \right|$$

Notons qu'on a $g(0) = f(x_0) \sqrt{\frac{2}{|\varphi''(x_0)|}}$. En utilisant le développement de φ autour de x_0 ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} e^{it\varphi(x)} f(x) dx &= \int_A^B e^{it\varphi(\psi^{-1}(y))} g(y) dy \\ &= e^{it\varphi(x_0)} \int_A^B e^{ity^2 \operatorname{sgn}(\varphi''(x_0))} g(y) dy \end{aligned}$$

g étant de classe C^∞ , il existe une fonction h de classe C^∞ telle que

$$g(y) = g(0) + yh(y) \quad \text{pour tout } y \in [A, B]$$

On a alors

$$\int_A^B e^{\pm ity^2} g(y) dy = g(0) \int_A^B e^{\pm ity^2} dy + \int_A^B ye^{\pm ity^2} h(y) dy$$

En posant $u = \sqrt{t}y$, la première intégrale devient une intégrale de Fresnel

$$\begin{aligned} \int_A^B e^{\pm ity^2} dy &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\sqrt{t}A}^{\sqrt{t}B} e^{\pm iu^2} du \\ &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm iu^2} du \\ &\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \sqrt{\pi} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale, on ne peut pas utiliser le lemme de la phase non stationnaire car $0 \in [A, B]$. Cependant, un calcul similaire donne

$$\begin{aligned} \int_A^B ye^{\pm ity^2} h(y) dy &= \left[\frac{1}{\pm 2it} e^{\pm ity^2} h(y) \right]_A^B - \frac{1}{\pm 2it} \int_A^B e^{\pm ity^2} h'(y) dy \\ &= \mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \right) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que h' est bornée sur $[A, B]$.

En rassemblant tous les morceaux, on a alors obtenu

$$\int_a^b e^{it\varphi(x)} f(x) dx = f(x_0) e^{it\varphi(x_0)} e^{i \operatorname{sgn}(\varphi''(x_0)) \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{2\pi}{t|\varphi''(x_0)|}} + \mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \right)$$

□

Les résultats s'adaptent facilement en dimension plus grande. On a toujours la phase instationnaire

Lemme 14. Soient $\varphi, f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, f à support compact. On suppose que $\nabla\varphi$ ne s'annule pas sur le support de f . Alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\varphi(x)} f(x) dx = \mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^N} \right)$$

et la phase stationnaire

Théorème 15. Soient $\varphi, f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, f à support compact. On suppose que $\nabla\varphi$ s'annule en un unique point x_0 sur le support de f et que

$$\det(\nabla^2\varphi(x_0)) \neq 0$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\varphi(x)} f(x) dx = \left(\frac{2\pi}{t} \right)^{\frac{d}{2}} \frac{e^{it\varphi(x_0)}}{\sqrt{|\det(\nabla^2\varphi(x_0))|}} e^{i \operatorname{sgn}(\det(\nabla^2\varphi(x_0))) \frac{\pi}{4}} f(x_0) + \mathcal{O}_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^{\frac{d}{2}+1}} \right)$$

Application : équation des ondes

Soient $c, \varepsilon > 0$, $\varphi, v \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ avec v à support compact, on considère l'équation des ondes sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ avec donnée initiale oscillante

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u &= \partial_x^2 u \\ u_{t=0} &= u_0 \text{ et } \partial_t u_{t=0} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

où $u_0(x) = e^{i\varepsilon^{-1}\varphi(x)}v(x)$. On s'intéresse au comportement de la solution quand ε tend vers 0.

Notons tout d'abord que le problème de Cauchy ci-dessus est bien posé. En effet, v étant à support compact, on obtient en prenant la transformée de Fourier en x l'EDO suivant

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2}\partial_t^2\hat{u} &= -\xi^2\hat{u} \\ \hat{u}_{t=0} &= \widehat{u_0} \text{ et } \partial_t\hat{u}_{t=0} = 0\end{aligned}$$

dont l'unique solution est donnée par

$$\hat{u}(t, \xi) = \cos(c\xi t)\widehat{u_0}(\xi)$$

Comme u_0 est lisse à support compact (donc en particulier Schwartz), on a en prenant la transformée de Fourier inverse (cf à ce sujet la section 3)

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \cos(c\xi t) \widehat{u_0}(\xi) d\xi$$

On s'assure par analyse-synthèse que c'est bien l'unique solution du problème 1. On s'intéresse maintenant au comportement en ε de $u(t, x)$, pour ça on cherche à écrire u comme une intégrale oscillante rentrant dans le cadre de la phase stationnaire. Pour simplifier les choses et coller à ce qu'il se passerait en plus grande dimension, on suppose qu'on travaille avec une phase planaire $\varphi(x) = \lambda x$ où $\lambda > 0$. En écrivant le cos sous forme exponentielle, on sépare la solution en deux

$$u_{\pm}(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{\pm ic\xi t} \widehat{u_0}(\xi) d\xi$$

puis en explicitant la transformée de Fourier de u_0

$$\begin{aligned}u_{\pm}(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{\pm ic\xi t} \widehat{u_0}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\xi(x-y) \pm ic\xi t} e^{i\varepsilon^{-1}\varphi(y)} v(y) dy d\xi \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\varepsilon^{-1}(\xi(x \pm ct - y) + \varphi(y))} v(y) dy d\xi\end{aligned}$$

A (x, t) fixés, on identifie alors la phase

$$\Psi_{\pm}(\xi, y) = \xi(x \pm ct - y) + \varphi(y)$$

et ses dérivées

$$\nabla\Psi_{\pm}(\xi, y) = \begin{pmatrix} x \pm ct - y \\ \varphi'(y) - \xi \end{pmatrix} \quad \nabla^2\Psi_{\pm}(\xi, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \varphi''(y) \end{pmatrix}$$

Les points stationnaires de Ψ_{\pm} sont donc les couples (ξ_0, y_0) tels que

$$(\xi_0, y_0) = (\varphi'(y_0), x \pm ct)$$

pour lesquels on a

$$\Psi_{\pm}(\xi_0, y_0) = \varphi(x \pm ct) \quad \text{et} \quad \nabla^2\Psi_{\pm}(\xi_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \varphi''(x \pm ct) \end{pmatrix}$$

En injectant l'expression de φ , on obtient que Ψ_{\pm} admet un unique point stationnaire $(\xi_0, y_0) = (\lambda, x \pm ct)$. L'asymptotique de la phase stationnaire donne alors

$$\begin{aligned}u_{\pm}(t, x) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\varepsilon^{-1}\Psi_{\pm}(\xi, y)} v(y) dy d\xi \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2} e^{i\varepsilon^{-1}\lambda(x \pm ct)} v(x \pm ct) + \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon)\end{aligned}$$

On voit alors qu'en première approximation, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, l'équation 1 transporte la donnée initiale d'une part le long des caractéristiques $x \pm ct$, et d'autre part que ce transport a lieu à vitesse finie c .

2 – Fonctions lisses et distributions

On commence par quelques rappels basiques sur les fonctions lisses, objet central de la théorie des distributions et plus généralement en analyse. Tout au long de ces notes, d désignera un entier naturel non nul, Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , φ une fonction test sur Ω et α, β, \dots des multi-indices génériques de \mathbb{N}^d .

2.1 – Rappels sur les fonctions lisses

Topologie définie par une famille de semi-normes

Définition 16. *Etant donné un \mathbb{K} -espace vectoriel E on appelle **semi-norme** toute application $p : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie*

(homogénéité) : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, u \in E, p(\lambda u) = |\lambda|p(u)$

(inégalité triangulaire) : $\forall u, v \in E, p(u + v) \leq p(u) + p(v)$

En fait, une semi-norme ne diffère d'une norme que par l'absence de la propriété de séparation. On peut combler cette lacune en considérant plutôt une **famille de semi-normes** $(p_i)_{i \in I}$ à laquelle on demandera d'être **séparante** :

$$[\forall i \in I, p_i(u) = 0] \Rightarrow u = 0$$

Etant donnée une telle famille $(p_i)_{i \in I}$ sur un espace vectoriel E , on peut définir sur E une topologie. Dans le cas où I est dénombrable, on peut même définir une métrique pour cette topologie de la façon suivante :

$$d(u, v) := \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \frac{p_i(u - v)}{1 + p_i(u - v)}$$

Remarque : *Ici on a pris $I = \mathbb{N}$ par souci de clareté (mais I étant dénombrable, toute injection de I dans \mathbb{N} conviendrait). Plusieurs définitions (toutes équivalentes) de la distance sont possibles suivant les usages. On peut par exemple remplacer la somme par un supremum sur I ou le quotient par $\min(1, p_i(u - v))$...*

La topologie définie par une famille de semi-norme n'étant pas des plus simples à manipuler, on ne s'étendra pas sur le sujet et on se contentera de la définition suivante, suffisante pour la suite de ces notes.

Définition 17. *Soient E, F deux espaces vectoriels équipés respectivement de 2 familles de semi-normes $(p_i)_{i \in I}$ et $(q_j)_{j \in J}$. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire, T est **continue** si et seulement si pour tout indice $j \in J$, il existe une constante $C_j > 0$ et un sous-ensemble **fini** $\Lambda_j \subset I$ tels que*

$$\forall u \in E, q_j(Tu) \leq C_j \sum_{i \in \Lambda_j} p_i(u)$$

Remarque : *Là encore, on peut de façon équivalente remplacer la somme par un maximum sur l'ensemble Λ_j .*

Pour plus de précisions sur ces notions de semi-normes, on pourra consulter les ouvrages classiques d'analyse fonctionnelle [1], [3], [4].

Fonctions de classe C^k

Pour $k \in \mathbb{N}$ ou $k = +\infty$ on désigne par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω à valeurs dans \mathbb{C} . Ces espaces sont munis des familles de semi-normes usuelles indexées par les compacts $K \subset \Omega$:

$$\text{si } k \in \mathbb{N} : p_K(u) := \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(K)}$$

$$\text{si } k = +\infty : p_{i,K}(u) := \sum_{|\alpha| \leq i} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(K)}$$

En considérant une suite exhaustive de compacts de Ω , on peut munir $C^k(\Omega)$ d'une famille dénombrable de semi-normes séparante dont la topologie induite est celle de la convergence uniforme sur tout compact des dérivées jusqu'à l'ordre k , donnant ainsi à $C^k(\Omega)$ une structure d'espace complet pour la métrique définie plus haut (mais pas d'espace de Banach, l'espace $C^k(\Omega)$ n'est pas forcément normable).

Fonctions à support compact

On notera $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à **support compact** dans Ω . La notion de topologie sur cet espace est un peu plus compliquée dans ce cas et requiert la notion de limite inductive de topologie. Dans les faits, il est amplement suffisant de connaître les suites convergentes de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour lesquelles on a une caractérisation simple.

Définition 18. Une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ **si et seulement si** il existe $K \subset \Omega$ compact tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \partial^\alpha \varphi_n \rightarrow \partial^\alpha \varphi \text{ uniformément sur } K$$

La topologie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est donc définie par les suites convergentes au sens ci-dessus, on peut donc facilement déduire que les opérations usuelles

$$\varphi \mapsto u\varphi \text{ où } u \in C^\infty(\Omega)$$

$$\varphi \mapsto \partial^\alpha \varphi \text{ où } \alpha \in \mathbb{N}^d$$

sont des applications continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

2.2 – Distributions

Premières propriétés des distributions

Etant donnée la topologie dont on a muni $\mathcal{D}(\Omega)$, on peut considérer son dual topologique $\mathcal{D}'(\Omega)$: l'espace des distributions. De façon parfaitement rigoureuse, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est donc une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Par convention (et pour insister sur l'aspect **dualité** des choses) on notera $\langle T, \varphi \rangle$ plutôt que $T(\varphi)$.

Définition 19. On appelle **distribution** toute forme linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ satisfaisant la propriété suivante :

pour toute suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers 0 dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$ dans \mathbb{C} .

De façon équivalente, T est une distribution sur Ω si :

pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support contenu dans K

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$$

Notons que dans la définition précédente, k dépend à priori du compact K dans lequel les fonctions tests ont leur support. S'il existe un indice p satisfaisant l'inégalité peu importe le compact K , on dira que la distribution est d'**ordre** p . On peut alors identifier l'espace des distributions d'ordre au plus p au dual des fonctions de classe C^p à support compact dans Ω .

Loin de la définition abstraite, les distributions sont en fait un objet tout à fait naturel, étendant la notion de fonction en analyse.

Exemple 20. Toute fonction $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ s'identifie de façon naturelle à une distribution via la formule

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f \varphi dx$$

On notera par abus $\langle f, \varphi \rangle$ pour $\langle T_f, \varphi \rangle$.

Toute fonction raisonnable s'identifie donc à une distribution, mais l'espace des distributions est beaucoup plus vaste que cela. L'exemple le plus basique est le suivant :

Exemple 21. La distribution de Dirac en un point $x \in \Omega$ est la distribution définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \delta_x, \varphi \rangle := \varphi(x)$$

On peut montrer que δ_x ne définit pas une fonction, plus précisément, que pour aucun $p \geq 1$ il n'existe de fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant $f \star \varphi = \varphi$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Exemples 22. Sur \mathbb{R} , toute une batterie d'exemples est donnée par les distributions valeur principale/partie finie :

- $\langle vp \frac{1}{x}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$
- $\langle Pf \frac{1}{x^2}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - 2 \frac{\varphi(0)}{\varepsilon}$
- $\langle Pf \frac{H}{x^2}, \varphi \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) \ln(\varepsilon)$ où $H = \mathbf{1}_{\{x > 0\}}$
- On peut définir de façon analogue la distribution $Pf \frac{1}{x^m}$ pour $m \geq 3$ en retirant la partie divergente de l'intégrale $\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^m} dx$. On obtient alors une distribution d'ordre m

Les fonctions usuelles définissent donc des distributions, ou à défaut le passage à la partie finie permet de donner un sens en cas de défaut d'intégrabilité en un point. Plus généralement, on a le résultat suivant qui regroupe les fonctions rationnelles évoquées ci-dessus :

Proposition 23. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ telle qu'il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$ de sorte que

$$|f(x)| \leq C|x|^{-m} \text{ pour } 0 < |x| \leq 1$$

Alors il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\langle T, \varphi \rangle = \int f \varphi dx$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

En plus de contenir les fonctions classiques, $\mathcal{D}'(\Omega)$ satisfait également certaines règles de stabilité usuelles.

Proposition 24. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un isomorphisme, on définit l'image de T par u , notée $T \circ u$ via la formule

$$\langle T \circ u, \varphi \rangle := |\det u|^{-1} \langle T, \varphi \circ u^{-1} \rangle$$

On définit ainsi une distribution $T \circ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, si de plus $T = f$ est une fonction localement intégrable, alors la définition coïncide avec la composition usuelle $(T \circ u)(x) = T(ux)$.

Soit $T \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $a \in C^\infty(\Omega)$, on définit le produit aT via la formule

$$\langle aT, \varphi \rangle := \langle T, a\varphi \rangle$$

On définit ainsi une distribution $aT \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et la définition coïncide avec le produit usuel si T est donné par une fonction localement intégrable.

En plus de sa structure d'espace vectoriel, $\mathcal{D}'(\Omega)$ est stable par multiplication par une fonction C^∞ voire même par isomorphisme dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$. On n'a cependant pas la stabilité par produit, plus précisément il n'existe pas de notion générale de produit entre deux distributions.

Exemple 25. On ne peut pas construire le produit des distributions $vp\frac{1}{x}$ et δ_0 d'une façon à obtenir un produit qui soit commutatif et associatif par rapport à la multiplication par des fonctions C^∞ .

En effet, supposons que ce soit le cas et considérons la distribution $T = vp\left(\frac{1}{x}\right)\delta_0 = \delta_0 vp\frac{1}{x}$. En multipliant les deux côté par la fonction $x \mapsto x$, on obtient d'une part à gauche

$$x \left(vp\left(\frac{1}{x}\right)\delta_0 \right) = \left(x \cdot vp\left(\frac{1}{x}\right) \right) \delta_0 = 1 \cdot \delta_0 = \delta_0$$

et d'autre part

$$x \left(\delta_0 vp\left(\frac{1}{x}\right) \right) = (x \cdot \delta_0) vp\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \cdot vp\frac{1}{x} = 0$$

ce qui est absurde.

En règle générale, on ne pourra définir le produit de deux distributions qu'à condition que la somme de leur régularité (en un sens à préciser) soit strictement positive, ce qui est bien le cas quand on multiplie par une fonction C^∞ .

Support d'une distribution

De la même façon que pour n'importe quel espace topologique X et fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ on peut définir le support de f par

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in X, f(x) \neq 0\}},$$

on peut définir le support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ de façon analogue.

Définition 26. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on dit que T est **nulle** sur un ouvert $U \subset \Omega$ si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \text{ supp } \varphi \subset U, \text{ on a } \langle T, \varphi \rangle = 0$$

On définit alors le **support** de $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, noté $\text{supp } T$, comme le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel T est nulle.

On peut dès lors noter que dans le cas où T est donnée par une fonction continue, la notion coïncide avec la notion usuelle. De plus, si $\text{supp } T \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$ alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Proposition 27. On note $\mathcal{E}'(\Omega)$ l'espace des distributions à support compact sur Ω . On peut identifier $\mathcal{E}'(\Omega)$ au dual topologique de $\mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$ pour la topologie des semi-normes définies en partie 1.1.

Une distribution $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ **si et seulement si** T se prolonge à $C^\infty(\Omega)$ et il existe $C > 0$, $m \in \mathbb{N}$ et $K \subset \Omega$ un compact tels que

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega), |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$$

Le compact K ci-dessus peut être choisi comme voisinage arbitrairement proche du support de T , mais en général pas le support de T . Notons aussi que de la définition vient directement le fait que toute distribution à support compact est d'**ordre fini**.

2.3 – Dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Comme on va le voir ici et dans le cadre de la transformée de Fourier, un certain nombre d'opérations linéaires licites sur les fonctions test de $\mathcal{D}(\Omega)$ peuvent se transposer naturellement à $\mathcal{D}'(\Omega)$. C'est le cas de la dérivation, on étend ici la définition usuelle de dérivation pour englober le cadre des distributions, donnant ainsi un sens à la dérivée d'une fonction continue, L^2 , ... voir même plus compliqué.

Définition 28. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on définit la distribution $\partial^\alpha T$ via la formule

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

L'espace des fonctions tests étant stable par dérivation et vue la propriété de continuité de $\mathcal{D}'(\Omega)$, on définit bien un élément de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dans le cas où $T = f$ est donné par une fonction localement intégrable (et suffisamment dérivable), la notion de dérivation coïncide avec la notion classique : c'est la formule d'intégration par parties !

$$\int_{\Omega} (\partial^\alpha f) \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f (\partial^\alpha \varphi) \, dx$$

On peut donc dériver des distributions, et ce à n'importe quel ordre. Cela permet de ne plus être restreint par le cadre analytique classique des fonctions de classe C^k et d'aborder des champs plus larges. Il convient tout de même de garder en tête que les objets qu'on manipule sont, sauf cas particuliers, des distributions et pas nécessairement des fonctions. Les notions purement fonctionnelles (évaluation en un point, signe, ...) sont donc à manipuler avec précaution.

Exemples 29.

- $\partial^\alpha \delta_0 : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \varphi(0)$
- $\frac{d}{dx} \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} = \delta_0$
- $\frac{d}{dx} \ln(|x|) = vp(1/x)$
- $\frac{d}{dx} vp(1/x) = -pf(1/x^2)$

Cette notion de dérivation permet également de donner une réciproque au fait que δ_0 et ses dérivées aient comme support $\{0\}$.

Proposition 30. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $x \in \Omega$. On a équivalence entre les deux points suivants

- $\text{supp } T = \{x\}$
- il existe $m \in \mathbb{N}$ et une suite $(c_\alpha)_{|\alpha| \leq m} \subset \mathbb{C}$ de coefficients tels que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \partial^\alpha \delta_x$$

Le lien entre fonctions et distributions peut être résumé dans le fait suivant (les dérivées étant prises au sens des distributions) :

Proposition 31. Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(f_\alpha)_{|\alpha| \leq m}$ des fonctions continues à support compact dans un voisinage de $\text{supp } T$ tels que

$$T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha$$

Bien qu'assez peu utile en pratique, cela confirme que la notion de distribution est l'extension naturelle de celle de fonction continue où l'on autorise la dérivation à n'importe quel ordre.

On peut également (sur \mathbb{R}) définir la notion de primitive d'une distribution.

Proposition 32. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, alors il existe $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $S' = T$. Deux telles primitives ne diffèrent que d'une constante additive.

Démonstration : Dans un cadre classique, pour une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on considérerait comme primitive évidente $\int_{-\infty}^x \varphi$. Cependant, on ne définit pas ainsi une fonction à support compact. Pour pallier à cela, considérons $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale 1. On définit alors l'application

$$\Psi : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \left[x \mapsto \int_{-\infty}^x \psi(t) \, dt \right] \quad \text{où} \quad \psi = \varphi - \theta \int_{\mathbb{R}} \varphi$$

On a alors $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\int_{\mathbb{R}} \psi = 0$ de sorte que $\Psi(\varphi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $(\Psi(\varphi))' = \psi$.
 Pour $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on

$$\langle S', \Psi(\varphi) \rangle = -\langle S, \varphi \rangle + \langle S, \theta \rangle \int_{\mathbb{R}} \varphi$$

On obtient d'une part que si $S' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ alors S est constante, et de plus cela suggère de poser comme candidat pour une primitive de T :

$$\langle S, \varphi \rangle := -\langle T, \Psi(\varphi) \rangle$$

Il est facile de vérifier que Ψ est une application linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui a un bon comportement vis-à-vis des normes C^k , on a bien défini ainsi une distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. De plus

$$\langle S', \varphi \rangle = \langle T, \Psi(\varphi') \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

□

De façon analogue aux théorèmes de dérivation sous le signe intégrale, on peut ici dériver sous le crochet. Les conditions sont cependant plus simples car la majoration uniforme nécessaire habituellement est contenue dans le fait qu'on ne manipule que des fonctions à support compact.

Théorème 33. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $U \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\varphi \in C^\infty(\Omega_x \times U_y)$ à support compact par rapport à x . Alors

$$y \in U \mapsto \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle$$

est de classe C^∞ sur U et de plus

$$\partial_y^\alpha \langle T, \varphi(\cdot, y) \rangle = \langle T, \partial_y^\alpha \varphi(\cdot, y) \rangle$$

2.4 – Convergence de distributions

On définit ici la topologie de $\mathcal{D}'(\Omega)$ par ses suites convergentes, précisément $\mathcal{D}'(\Omega)$ va être muni de la topologie de la convergence simple.

Définition 34. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω . On dit qu'elle **converge** vers une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

Il est immédiat de vérifier qu'ainsi définie, la limite d'une suite de distributions est unique.

Remarque : Il n'est pas a priori nécessaire de connaître la limite T pour s'assurer de la convergence d'une suite de distributions, le critère suivant suffit :
 si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ la suite $(\langle T_n, \varphi \rangle)_n$ converge dans \mathbb{C} , alors il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Notons que cette notion de convergence s'étend naturellement à $\mathcal{E}'(\Omega)$ en remplaçant l'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$ par $C^\infty(\Omega)$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ étant un espace suffisamment large pour contenir les espaces fonctionnels usuels, on s'attend à ce que la notion de convergence coïncide. C'est en effet le cas :

Proposition 35. Les convergences dans les espaces usuels $\mathcal{D}(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $L^p(\Omega)$, $L^1_{loc}(\Omega)$ impliquent toutes la convergence au sens des distributions.

Remarque : $\mathcal{D}'(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}'(\Omega)$) est donc muni de la topologie de la convergence simple. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}(\Omega)$) est un espace de Montel, les suites faiblement convergentes sont exactement les suites fortement convergentes. Cela justifie de ne s'intéresser qu'à la convergence simple plutôt qu'à la topologie forte de $\mathcal{D}'(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}'(\Omega)$). En outre, cela permet également de pas s'inquiéter de la topologie pour parler de convergence d'une suite de distributions. Le même raisonnement sera valable pour l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées.

2.5 – Convolution de distributions

La notion qui suit est capitale pour l'étude d'équations du type EDP. Elle étend naturellement la définition de la convolution de fonctions au cadre plus large des distributions. On veillera à respecter certaines règles de compatibilité pour s'assurer que l'objet qu'on définit fait sens (à l'instar de la convolution qui nécessite par exemple $L^1 - L^1$, $L^1 - L^p$ ou $L^p - L^q$). On peut dans un premier temps définir le produit de convolution entre une distribution et une fonction, pour peu que cette dernière soit dans le bon espace de fonctions tests.

Définition 36. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ (ou respectivement $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$). On définit la **convolution** $T \star \varphi$ comme la **fonction** $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ définie par

$$T \star \varphi : x \mapsto \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

On peut également définir le produit de convolution de deux distributions pour peu que l'une d'entre elles soit à support compact.

Définition 37. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, la **convolution** $T \star S$ est la distribution donnée par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \langle T \star S, \varphi \rangle := \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle$$

ou de façon équivalente, en notant $\tilde{\varphi} = \varphi(-\cdot)$

$$\langle T \star S, \varphi \rangle = T \star (S \star \tilde{\varphi})(0)$$

Comme on peut s'y attendre, la convolution de deux distributions coïncide avec la définition précédente si $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ou $S \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. On obtient également toutes les propriétés raisonnables qu'on attendrait d'un produit de convolution.

Proposition 38. Soient $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ dont au moins une est à **support compact**. On a

- commutativité : $T \star S = S \star T$
- associativité : si $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, $(T \star S) \star U = T \star (S \star U)$
- élément neutre : $\delta_0 \star T = T$
- dérivation : pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\partial^\alpha(T \star S) = (\partial^\alpha T) \star S = T \star (\partial^\alpha S)$
- support : $\text{supp}(T \star S) \subset \text{supp} T + \text{supp} S$

On pourrait même définir la convolution de deux distributions dans des cas plus généraux, par exemple la condition suivante est suffisante pour que la formule définissant la convolution ait encore un sens :

$$\forall R > 0, \exists C > 0, [x \in \text{supp} T, y \in \text{supp} S, |x + y| \leq R] \Rightarrow \max(|x|, |y|) \leq C$$

Par exemple cette condition est satisfaite pour les distributions à support compact, mais aussi si T, S ont toutes deux leur support dans \mathbb{R}^+ (ou \mathbb{R}^-).

Exemple 39. On ne pourra pas définir la convolution de deux distributions en général si on souhaite garder la commutativité et l'associativité. Par exemple en considérant $T = 1$, $S = \delta'_0$ et $U = \mathbf{1}_{\{x > 0\}}$, supposons qu'on puisse définir les convolutions sans problème de sorte qu'elle satisfassent les propriétés ci-dessus. En particulier on aurait $(T \star S) \star U = T \star (S \star U)$. Cependant $(T \star S) \star U$ car

$$T \star S = 1 \star \delta'_0 = (1 \star \delta_0)' = 1' = 0$$

et d'autre part $T \star (S \star U) = 1$

$$S \star U = \delta'_0 \star \mathbf{1}_{\{x > 0\}} = (\delta_0 \star \mathbf{1}_{\{x > 0\}})' = (\mathbf{1}_{\{x > 0\}})' = \delta_0$$

2.6 – Exercices

Exercice 2.1. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on définit

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \left(\phi \left(\frac{1}{k} \right) - \phi(0) \right).$$

1. Justifier que cette formule définit bien une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.
2. Prouver que T n'est pas d'ordre 0. Pour cela, on rappelle que si $a < b < c < d$ sont des réels, il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ sur $[b, c]$ et le support de φ est contenu dans $[a, d]$.

Exercice 2.2. Soit T la forme linéaire définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par $\langle T, \varphi \rangle = \varphi'(0)$.

1. Démontrer que T est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.
2. On souhaite démontrer que T n'est pas une distribution d'ordre 0.
 - (a) Pour tout $n \geq 1$, donner un exemple de fonction f_n de classe \mathcal{C}^∞ telle que $f_n'(0) = n$ et telle que $\|f_n\|_\infty = 1$.
 - (b) En déduire, pour tout $n \geq 1$, l'existence d'une fonction $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, à support dans $[-1, 1]$ et telle que $\varphi_n'(0) = n$ et $\|\varphi_n\|_\infty \leq 1$.
 - (c) Conclure.

Exercice 2.3. Démontrer que l'on définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle T, \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

Cette distribution est notée $vp(1/x)$. Montrer que son ordre est inférieur ou égal à 1.

Exercice 2.4. Pour $-2 < \alpha < -1$, montrer que quel que soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \phi(x) dx = A\varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon,$$

où A dépend de ϕ , mais pas de ε , et où R_ε tend vers une limite si $\varepsilon \rightarrow 0$. On pose

$$\langle pf(x_+^\alpha), \phi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R_\varepsilon.$$

Montrer que $pf(x_+^\alpha)$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.

Exercice 2.5. 1. Montrer que la formule suivante

$$\langle S, \phi \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \phi^{(n)}(1/n)$$

définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)$.

2. On veut montrer qu'il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, $\langle T, \phi \rangle = \langle S, \phi \rangle$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'une telle distribution T existe.
 - (a) Montrer que pour tout suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de complexes donnée, il existe une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de support inclus dans $]3/4, 5/4[$ et telle que $f^{(j)}(1) = a_j$ quel que soit j .
 - (b) On pose $f_k(x) = f(k^2x - k + 1)$. Montrer que les supports des f_k sont deux à deux disjoints.
 - (c) Calculer $f_p^{(n)}(1/n)$.
 - (d) En prenant $K = [0, 5/4]$, $\phi_m = \sum_{p=1}^m f_p$ et $a_k = 1$ montrer que T ne peut pas être continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.6. Démontrer que la formule

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi^{(n)}(n)$$

définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Cette distribution est-elle d'ordre fini ? (on pourra procéder par l'absurde, et poser $\phi(x) = \psi(\lambda(x - (m + 1)))$, où $\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \psi_0(x)$, ψ_0 étant une fonction de $\mathcal{D}(]-1/2, 1/2[)$, égale à 1 sur $[-1/4, 1/4]$, et $\lambda > 1$).

Exercice 2.7. 1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, à support dans \mathbb{R}_+^* , positive et non identiquement nulle. Démontrer qu'il existe deux constantes C et β strictement positives telles que :

$$\int_0^{+\infty} \exp(n/u) \phi(u) du \geq C_1 \exp(\beta n).$$

2. Montrer qu'il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(]0, +\infty[)$, on ait

$$\langle T, \phi \rangle = \int_0^{+\infty} \exp(1/t) \phi(t) dt.$$

On pourra raisonner par l'absurde, considérer une fonction ϕ positive à support dans $[1/2, 1]$ et poser $\phi_n(x) = \phi(nx)$.

Exercice 2.8. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\phi \geq 0$, on ait $\langle T, \phi \rangle \geq 0$.

1. Soit K un compact de \mathbb{R}^n . Montrer que T est continue pour la topologie de $C(K)$.
2. En déduire qu'il existe une mesure borélienne positive μ_K sur K telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ à support dans K , on ait

$$\langle T, \phi \rangle = \int_K \phi d\mu_K.$$

3. Montrer qu'il existe une mesure borélienne positive μ sur \mathbb{R}^n , localement finie, telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on ait

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu.$$

Exercice 2.9. Déterminer les limites dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ des suites (T_n) de distributions suivantes :

1. $T_n = n (\delta_{1/n} - \delta_{-1/n})$;
2. $T_n = n^2 (\delta_{1/n} + \delta_{-1/n} - 2\delta_0)$.

Exercice 2.10. Soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n = n$ sur $[0, 1/n]$ et $f_n = 0$ sinon. On note T_n la distribution associée à f_n . Étudier la convergence de la suite (T_n) .

Exercice 2.11. Soit $(f_j)_{j \geq 1}$ une suite de fonctions de $L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\text{supp}(f_j) \subset B(0, \varepsilon_j)$ avec $\varepsilon_j \rightarrow 0$, $f_j \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^d} f_j(x) = 1$. Démontrer que $f_j \rightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 2.12. 1. Soit g une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$. Démontrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \cos(\lambda x) g(x) dx = 0$.

2. Soit T_n la distribution associée à $\sin^2(nx)$. Étudier la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite (T_n) .
3. Soit S_n la distribution associée à $n \sin(nx)H$, où H est la fonction de Heavise. Étudier la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite (S_n) .

Exercice 2.13. On note T_N la distribution associée à la fonction localement intégrable $t \mapsto \frac{\sin(Nt)}{\pi t}$. Montrer que T_N converge vers δ_0 . On rappelle que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.14. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ non identiquement nulle. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(nx)$. Étudier la convergence de la suite (φ_n) dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 2.15. Soit (f_n) la suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par :

$$f_n(t) = \frac{1}{2^n} \exp\left(-\frac{1}{1-|t|^2/n^2}\right) \text{ si } |t| < n, \text{ 0 sinon.}$$

Montrer que, pour chaque $k \geq 0$, la suite de fonctions $(f_n^{(k)})$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ que l'on précisera. A-t-on convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$?

Exercice 2.16. 1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ on pose

$$\phi_t(x) = \frac{\phi(x+th) - \phi(x)}{t}.$$

Montrer que $\phi_t \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour $t \neq 0$.

2. Montrer que lorsque t tend vers 0, ϕ_t converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vers une fonction que l'on déterminera.

Exercice 2.17. Soit $\varphi, \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\theta(0) = 1$. Démontrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \varphi(0)\theta(x) + x\psi(x).$$

Exercice 2.18. Soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(t) dt = 1$. Démontrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(c, \psi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que

$$\varphi = \psi' + c\varphi_0.$$

Exercice 2.19. Soit φ une fonction \mathcal{C}^∞ , à support compact, telle que φ est nulle en dehors de $[-1, 1]$, et $\int_{-1}^1 \varphi(x) dx = 1$. Le but de l'exercice est de construire à l'aide de φ une fonction \mathcal{C}^∞ , égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$, et nulle en dehors de $[-1, 1]$.

1. Construire à partir de φ une fonction \mathcal{C}^∞ u égale à 0 sur $]-\infty, -1[$ et égale à 1 sur $]1, +\infty[$.
2. En déduire une fonction v égale à 1 sur $[-1/2, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, -1]$ et une fonction w égale à 1 sur $]-\infty, 1/2[$ et égale à 0 sur $]1, +\infty[$.
3. Construire ψ .

Exercice 2.20. 1. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, et $m \geq 0$. Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(b) = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) + (m+1) \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^m \partial^\alpha f(a+t(b-a)) dt.$$

2. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ s'annulant à l'origine. Montrer qu'il existe des fonctions $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = x_1 g_1(x) + \dots + x_n g_n(x).$$

3. Généraliser au cas où f et toutes ses dérivées (partielles) jusqu'à l'ordre $m-1$ s'annulent en 0.

Exercice 2.21. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ indéfiniment dérivables et telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = a_n.$$

1. En utilisant une fonction $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égale à 1 dans un voisinage de 0, résoudre le problème dans le cas où la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence non nul.

2. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support inclus dans $[-1, 1]$ et égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$. On définit une suite α_n par $\alpha_n = 1$ si $|a_n| \leq 1$ et $\alpha_n = |a_n|$ sinon. On pose, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n \phi(\alpha_n x), \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x).$$

- (a) Vérifier que la série définissant f converge normalement sur \mathbb{R} (on pourra majorer pour chaque n $f_n(x)$ en séparant les cas $|x\alpha_n| \geq 1$ et $|x\alpha_n| < 1$).
- (b) Montrer que f est C^∞ , et calculer $f^{(k)}(0)$.
3. Est-il toujours possible d'obtenir une fonction vérifiant la même propriété si on demande que f soit entière ?

Exercice 2.22. Soit $F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikt}$, qui est une fonction localement intégrable. On pose T_N la distribution associée à F_N . Le but de l'exercice est de déterminer la limite (au sens des distributions) de (T_N) .

1. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction à support dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que

$$\langle T_N, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)} \varphi(t) dt,$$

$$\text{où } \phi(t) = \sum_{n=-M}^M \varphi(t + 2n\pi).$$

2. En écrivant $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$, où ψ est C^∞ , démontrer que T_N converge vers $\sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi p}$.

Exercice 2.23. 1. Soit T_1 la distribution associée à la fonction $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. Calculer la dérivée de T_1 .

2. Soit T_2 la distribution associée à la fonction $g(x) = |x|$. Calculer la dérivée de T_2 .

Exercice 2.24. Déterminer la dérivée de la distribution associée à $\ln|x|$.

Exercice 2.25. Montrer que si (T_n) est une suite de distributions qui converge vers T , alors (T'_n) converge vers T' .

Exercice 2.26. Calculer explicitement $\langle x^\alpha \partial^\beta \delta_p, \phi \rangle$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, où α et β sont des entiers et δ_p est la masse de Dirac au point $p \in \mathbb{R}$. Quel est le support de $x^\alpha \partial^\beta \delta_p$?

Exercice 2.27. Soit f une fonction définie sur $]a, b[$ de classe C^1 par morceaux. Soit $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$ une subdivision adaptée à f , c'est-à-dire que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$. Montrer que l'on a :

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{N-1} (f(a_i + 0) - f(a_i - 0)) \delta_{a_i},$$

où f' est la dérivée usuelle de f , définie hors des points a_i , et $f(a_i \pm 0)$ sont les limites à droite et à gauche de f en a_i (les distributions sont considérées comme éléments de $\mathcal{D}'(]a, b[)$).

Exercice 2.28. 1. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Montrer que toute distribution sur I admet une primitive.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $T' = 0$. Montrer que T est la distribution associée à une fonction constante.

Exercice 2.29. 1. Donner un exemple de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et de fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{supp}(T) = \{0\}$, $\varphi(0) = 0$ et $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$. Plus généralement, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, quelle condition faut-il sur T et ψ pour que $\langle T, \psi \rangle = 0$?

2. Quelle condition donner à $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour que $\langle T, \psi_1 \rangle = \langle T, \psi_2 \rangle$?

Exercice 2.30. Soit T une distribution sur \mathbb{R}^n et f une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^n .

1. Montrer que si $fT = 0$, alors le support de T est inclus dans $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\}$.
2. En prenant $T = \delta' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, montrer que la réciproque est fautive.

3. Déterminer les fonction f de classe C^∞ telles que $f\delta' = 0$.

Exercice 2.31. Soit $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\text{supp}(T) = \{0\}$.

- Justifier que T est d'ordre fini. Dans la suite, on notera m son ordre.
- Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0. Soit ρ une fonction plateau valant 1 au voisinage de 0, et 0 hors de $] -1, 1[$. On note $\rho_r(x) = \rho(x/r)$.
 - Montrer que si $l \leq m$, alors $\sup_{|x| \leq r} |(\rho_r \phi)^{(l)}(x)| \rightarrow_{r \rightarrow 0} 0$.
 - En déduire que $\langle T, \phi \rangle = 0$.
- Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que ϕ s'écrit

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \psi(x),$$

où ψ est une fonction de classe C^∞ telle que $\psi(x) = o(x^m)$.

- En déduire l'existence de complexes a_0, \dots, a_m tels que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\langle T, \phi \rangle = \sum_{0 \leq k \leq m} a_k \phi^{(k)}(0).$$

Exercice 2.32. Soit T l'application linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ dans \mathbb{C} définie par

$$\langle T, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(x, -x) dx.$$

- Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?
- Déterminer le support de T . En déduire qu'il n'existe pas de fonctions continues sur \mathbb{R}^2 telle que T soit la distribution associée à cette fonction.
- Calculer au sens des distributions

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Exercice 2.33. 1. Montrer que $xvp(1/x) = 1$.

- Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xu = 0$.
 - Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\phi(0) \neq 0$. Démontrer qu'il existe une constante C_ϕ telle que, pour toute fonction $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ égale à 1 sur le support de ϕ , alors

$$C_\phi = \langle u, \eta \rangle.$$

- Montrer que si ϕ et ψ sont deux fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ telles que $\phi(0) \neq 0$ et $\psi(0) \neq 0$, alors $C_\phi = C_\psi$.
 - En déduire toutes les solutions de $xu = 0$.
- Résoudre l'équation $xu = 1$.
 - Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que si $(\sin x)T = 0$ si, et seulement si, il existe une suite (c_n) telle que $T = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta_{n\pi}$.

Exercice 2.34. On rappelle que les distributions $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $xT = 0$ sont les distributions $c\delta_0$, $c \in \mathbb{R}$.

- Pour tout $k \geq 0$, résoudre l'équation $xT = \delta_0^{(k)}$.
- Résoudre l'équation $x^2T = \delta_0$.
- Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, résoudre l'équation $x^n T = \delta_0$.

Exercice 2.35. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est dite **homogène de degré** $p \in \mathbb{R}$ si, pour tout $\lambda > 0$ et tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on a l'égalité

$$\langle T, \phi_\lambda \rangle = \lambda^{-n-p} \langle T, \phi \rangle, \tag{2}$$

où $\phi_\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est définie par $\phi_\lambda(x) = \phi(\lambda x)$.

1. Montrer que la masse de Dirac en 0 est homogène de degré $-n$. Montrer que sur \mathbb{R} , la distribution $\nu(1/x)$ est homogène de degré -1 .
2. Déterminer les distributions homogènes de degré -1 sur \mathbb{R} dont le support est $\{0\}$ (on rappelle qu'une distribution dont le support est $\{0\}$ est combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0).
3. Dans le cas où T est une distribution associée à une fonction f de classe C^∞ , quelle propriété vérifie f lorsque T est homogène de degré p ?
4. Montrer que la dérivée d'une distribution homogène est encore homogène.
5. Montrer qu'une distribution est homogène de degré p si et seulement si

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = pT.$$

On pourra utiliser le fait que si $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ alors $\frac{\phi_\lambda - \phi}{\lambda - 1}$ converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ vers $\sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial x_j}$ lorsque λ tend vers 1.

6. En déduire toutes les distributions homogènes sur \mathbb{R} de degré 2.
- Exercice 2.36.** 1. Résoudre dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'équation $T' = 0$ (on pourra utiliser que si φ_0 est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ satisfaisant $\int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x) dx = 1$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe un unique $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \psi' + c\varphi_0$).
2. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $T' - aT = 0$, où $a \in \mathbb{R}$.
 3. Résoudre l'équation différentielle $T' + T = H$, où H est la fonction de Heaviside.

Exercice 2.37. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, les équations différentielles suivantes :

1. $2xT' - T = \delta_0$,
2. $xT' + T = 0$.

3 – Distributions tempérées et espace de Schwartz

Après avoir défini les classes de distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on s'intéresse ici à la dernière : $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Très utile en pratique, elle est en lien direct avec la transformation de Fourier et constitue l'espace naturel auquel étendre la définition fonctionnelle.

3.1 – Transformée de Fourier et espace de Schwartz

On s'intéresse ici dans un premier temps au "bon" cadre fonctionnel dans lequel fait sens la transformée de Fourier. Classiquement, pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier par la formule suivante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx$$

Cette formule a du sens dès que f est intégrable et on définit ainsi une fonction \hat{f} dont on peut montrer qu'elle est continue et tend vers 0 en l'infini. Dans le but de transposer la définition aux distributions, il faut alors chercher un espace de fonctions tests qui soit invariant par l'action de \mathcal{F} . En effet, rien n'assure que pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on ait $\hat{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Une première idée est d'étendre la définition par densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 . C'est possible par prolongement et on obtient ainsi une application

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$

qui coïncide avec \mathcal{F} sur $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ et satisfait de plus la formule de Plancherel :

$$\|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (2\pi)^{d/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Bien que L^2 soit stable par \mathcal{F} , l'espace est constitué de fonctions dont on ne sait même pas si elles sont lisses, rendant caduc toute utilisation des distributions.

Restant dans un cadre L^1 , si f est suffisamment dérivable avec ses dérivées dans L^1 alors on obtient

$$\mathcal{F}(\partial_x^\alpha f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \partial_x^\alpha f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$$

Si, de façon analogue, f est telle que $x^\alpha f \in L^1$ et \hat{f} est suffisamment dérivable alors

$$\partial_\xi^\alpha \hat{f}(\xi) = \partial_\xi^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix \cdot \xi} dx \right) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f)(\xi)$$

On s'aperçoit alors du fait **fondamental** suivant : la transformation de Fourier échange régularité (dérivabilité) et décroissance (polynomiale) à l'infini. Cela motive la définition de l'espace suivant

Définition 40. On appelle *espace de Schwartz* l'espace

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < +\infty \right\}$$

Il est muni de la famille de semi-normes séparante

$$\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, p_{\alpha, \beta}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$$

La topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est donnée par une famille dénombrable de semi-normes séparante et est donc métrisable, donnant à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ une structure d'espace complet. On a de plus les injections continues et denses suivantes

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mélange donc dans sa définition conditions de régularité et de décroissance, il en résulte le fait suivant.

Proposition 41. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction dont toutes les dérivées sont à croissance **au plus polynomiale**, alors $f\partial^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Par cette propriété de stabilité, l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ correspond donc exactement à ce que l'on recherchait concernant la transformée de Fourier.

Exemples 42.

- $x \mapsto P(x)e^{-Ax \cdot x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ si P est un polynôme et A est définie positive,
- une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ n'est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ que si $P = 0$,
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$

Proposition 43. La transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ continu pour la famille de semi-normes $(p_{\alpha,\beta})_{\alpha,\beta}$. De plus en notant $\overline{\mathcal{F}}$ l'application

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \overline{\mathcal{F}}\varphi(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)e^{ix \cdot \xi} dx$$

alors on a la relation valable sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ appelée **formule d'inversion de Fourier**

$$\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = id$$

Sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ la transformée de Fourier définit donc un isomorphisme qui satisfait de bonnes relations de compatibilité vis-à-vis de la dérivation et de la multiplication par des polynômes. Une dernière relation peut être obtenue dans le cadre de la convolution.

Proposition 44. Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\varphi \star \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et on a

$$\mathcal{F}(\varphi \star \psi) = \hat{\varphi} \cdot \hat{\psi} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\varphi \cdot \psi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{\varphi} \star \hat{\psi}$$

3.2 – Distributions tempérées

Au vu des propriétés de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on est donc en mesure de définir un espace convenable pour la transformée de Fourier des distributions. Comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ n'est pas stable par \mathcal{F} , on doit se restreindre à un sous espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, précisément $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, le dual de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Définition 45. On appelle espace des **distributions tempérées** $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est à dire l'espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Les éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sont caractérisés de la façon suivante : une forme linéaire T sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est une **distribution tempérée** si et seulement si il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq k} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi\|_{L^\infty}$$

On a de plus les inclusions suivantes

$$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

A la différence de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, toute fonction localement intégrable ne définit pas forcément une distribution tempérée. On doit pour cela imposer une condition sur le comportement à l'infini.

Proposition 46. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, une condition **suffisante** pour que f définisse une distribution tempérée est :

$$\exists m \in \mathbb{N}, \exists p \in [1, +\infty], (1 + |x|^2)^{-m} f \in L^p(\mathbb{R}^d)$$

Tout comme le théorème de structure des distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ou $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, on a un résultat analogue pour $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 47. Une distribution T est tempérée **si et seulement si** il existe $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et f continue bornée tels que

$$T = \partial^\alpha ((1 + |x|^2)^m f)$$

Exemples 48.

- $L^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$
- $\{f \in C^0 \text{ à croissance lente}\} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
- $x \mapsto e^x \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
- $x \mapsto e^x \cos(e^x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
- $vp(\frac{1}{x}) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$
- $\sum_{k \geq 1} k^{10} \delta_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

3.3 – Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

On peut enfin étendre \mathcal{F} aux distributions par dualité.

Définition 49. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on définit la **transformée de Fourier** de T , notée $\mathcal{F}T$ ou \hat{T} par

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stable par \mathcal{F} , on définit bien ainsi une distribution tempérée. On peut de même définir $\overline{\mathcal{F}}$.

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \langle \overline{\mathcal{F}}T, \varphi \rangle = \langle T, \overline{\mathcal{F}}\varphi \rangle$$

Toutes les propriétés déjà valables sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se transportent à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 50. $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est un **isomorphisme continu** (au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$) d'inverse $\overline{\mathcal{F}}$. On a

$$\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

Les relations de dérivation sont toujours valables sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{F}(\partial_x^\alpha T) = (i\xi)^\alpha \hat{T} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}((-ix)^\alpha T) = \partial_\xi^\alpha \hat{T}$$

Exemples 51. Comme la transformée de Fourier n'est en générale pas définie de façon directe, on ne peut pas faire comme dans le cas classique et écrire l'intégrale. On préférera plutôt utiliser les relations de dérivation, l'inversion de Fourier ou certaines identités en fonction du contexte.

- Pour $a \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $T = \partial^\alpha \delta_a$ donne $\hat{T} = (i\xi)^\alpha e^{-i\xi \cdot a}$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $T = x^\alpha$ donne $\hat{T} = i^{|\alpha|} (2\pi)^d \partial^\alpha \delta_0$.
- $T = vp(\frac{1}{x})$ donne $\hat{T} = i\pi - 2i\pi \mathbf{1}_{\{\xi \geq 0\}}$.

En effet, on a la relation $x \cdot vp(\frac{1}{x}) = 1$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ donc en appliquant la transformée de Fourier

$$i \frac{d}{d\xi} \hat{T} = \widehat{xT} = \hat{1} = 2\pi \delta_0$$

de sorte que $\frac{d}{d\xi} \hat{T} = -2i\pi \delta_0$. En primitivant on a alors pour une constante $C \in \mathbb{C}$

$$\hat{T} = -2i\pi \mathbf{1}_{\{\xi \geq 0\}} + C$$

Il suffit de remarquer que $\check{T} = -T$ et qu'alors

$$0 = \hat{T} + \check{\hat{T}} = -2i\pi + 2C$$

- $T = \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}$ donne $\hat{T} = \pi \delta_0 - i \cdot vp(\frac{1}{x})$.
Il suffit pour le voir d'appliquer la formule d'inversion de Fourier au calcul précédent.
- $T = |x|$ donne $\hat{T} = -2pf(\frac{1}{x^2})$.
En effet $|x| = x(\mathbf{1}_{\{x \geq 0\}} - \mathbf{1}_{\{x \leq 0\}})$ et en remarquant que la multiplication par x apporte une dérivation, on utilise le calcul précédent.
- $T = pf(\frac{1}{x^2})$ donne $\hat{T} = -\pi|x|$.

On conserve également les relations vis-à-vis de la convolution. La convolution sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est définie comme pour $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$: soit avec une fonction test, soit une distribution à support compact, on définit alors respectivement une fonction lisse ou une distribution à support compact.

Dans le cas des distributions à support compact, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ s'identifie au dual de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, il est donc possible de considérer le crochet de dualité entre $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $x \mapsto e^{-ix \cdot \xi}$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Proposition 52. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$, \hat{T} est une fonction lisse à croissance lente. De plus, \hat{T} est donnée par la formule

$$\hat{T} : \xi \mapsto \langle T_x, e^{-ix \cdot \xi} \rangle$$

On est donc assuré que le produit d'une distribution tempérée avec \hat{S} où $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ fait sens et on obtient

Proposition 53. Si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathcal{F}(T \star S) = \hat{T} \cdot \hat{S} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\varphi \cdot T) = \frac{1}{(2\pi)^d} \hat{\varphi} \star \hat{T}$$

3.4 – Exercices

Exercice 3.1. 1. Justifier que si (ϕ_k) est une suite de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ qui converge dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ vers $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors la convergence a aussi lieu dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

2. Donner une suite de fonctions (f_n) de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, qui converge vers 0 dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, mais pas dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 3.2. 1. Démontrer que la distribution associée à e^t n'est pas tempérée. On pourra l'appliquer à $\tau_a \phi$ où $\phi \in \mathcal{D}(-1, 1[)$ est positive, non identiquement nulle, et $\tau_a \phi(x) = \phi(x - a)$.

2. Soit (a_k) une suite de nombres complexes et $T = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \delta_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe $p \geq 1$ et $C \geq 0$ tel que $|a_k| \leq C(1 + k)^p$. On pourra appliquer T à la fonction $\tau_k \phi$ où $\phi \in \mathcal{D}(-1, 1[)$ satisfait $\phi(0) = 1$.

Exercice 3.3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction localement intégrable. On désigne par S la distribution associée à la fonction f .

1. On suppose qu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(1 + |x|)^p} < +\infty.$$

Montrer que S est tempérée.

2. (a) Calculer $g'(x)$, où g est la fonction $g(x) = x^m \sin(\exp x)$.

(b) Montrer que si S est la distribution associée à la fonction $f(x) = x^m \exp(x) \cos(\exp x)$, $m \geq 1$, alors S est tempérée. Que pensez-vous de la réciproque à la question précédente ?

3. (a) Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\psi = 1$ sur $[-1, 1]$, 0 hors de $[-2, 2]$, $0 \leq \psi \leq 1$. Pour $r \geq 1$, on pose $\phi_r(x) = \psi(x/r)$. Montrer que pour tous $\alpha, k \geq 0$ il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $r \geq 1$, on ait

$$(1 + |x|)^k |\phi_r^{(\alpha)}(x)| \leq C(1 + r)^k.$$

(b) On suppose désormais que f est positive, et que S est une distribution tempérée. Montrer que la réciproque à la question 1. est vraie.

Exercice 3.4. 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable telle que $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = 1$. On pose, pour $n \geq 1$, $f_n(t) = n f(nt)$. Montrer que $f_n \rightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. En utilisant le théorème de Weierstrass, déduire de la question précédente qu'il existe une suite de polynômes (P_n) telle que $P_n \rightarrow \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3. Montrer qu'il n'existe pas une telle suite de polynômes qui converge vers δ_0 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (on pourra raisonner par l'absurde, montrer que le degré des polynômes d'une telle suite tend vers l'infini, et puis...).

Exercice 3.5. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ homogène de degré $\lambda \in \mathbb{R}$, ie

$$\langle T, \varphi_t \rangle = t^{-(n+\lambda)} \langle T, \varphi \rangle$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et tout $t > 0$, où $\varphi_t(x) = \varphi(tx)$. Montrer que \hat{T} est homogène d'un degré que l'on précisera.

Exercice 3.6. Soit $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ telle que $\Delta T = 0$.

1. Montrer que $\text{supp}(\hat{T}) \subset \{0\}$.
2. Conclure que les seules fonctions u de classe C^2 telles que $\Delta u = 0$ et u est à croissance modérée sont polynômiales.
3. Retrouver le théorème de Liouville.

Exercice 3.7. 1. Montrer que la distribution $vp(1/x)$ est une distribution tempérée. On pourra remarquer que, pour tout ϕ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle vp(1/x), \phi \rangle = \int_{-1}^1 \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} dx + \int_{|x| \geq 1} \frac{\phi(x)}{x} dx.$$

2. Calculer sa transformée de Fourier. On pourra utiliser que, pour tout ϕ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle vp(1/x), \phi \rangle = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{1}{2} \frac{\phi(\omega) - \phi(-\omega)}{\omega} d\omega.$$

3. En déduire une distribution T telle que $\hat{T} = H$, où H est la fonction de Heaviside.

Exercice 3.8. 1. Soit $\alpha > 0$. Calculer la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la distribution $\frac{1}{x+i\alpha\varepsilon}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

2. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $H(x)e^{-\lambda x}$, où $\lambda > 0$ et H est la fonction de Heaviside.
3. En déduire la transformée de Fourier de H .
4. Retrouver la transformée de Fourier de $vp(1/x)$.

Exercice 3.9. Dans cet exercice, on prendra pour simplifier les énoncés la normalisation suivante pour la transformée de Fourier :

$$\hat{\phi}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} \phi(y) dy.$$

On considère la distribution $P = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_j \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, où δ_j représente la masse de Dirac au point $j \in \mathbb{Z}$. On l'appelle le peigne de Dirac.

1. Montrer que P est périodique de période 1, i.e. montrer que

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \langle P, \tau_1 \phi \rangle = \langle P, \phi \rangle \text{ où } \tau_1 \phi(x) = \phi(x+1).$$

2. Montrer que P est la dérivée, au sens des distributions, de la distribution $E := \sum_{j \in \mathbb{Z}} F_j$, où $F_j(x) = j1_{[j, j+1[}(x)$. En déduire que P est une distribution tempérée.
3. Montrer que la transformée de Fourier \hat{P} de P est également périodique de période 1.
4. On pose $u(x) = e^{2i\pi x}$. Montrer que $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \implies \langle u\hat{P}, \phi \rangle = \langle \hat{P}, \phi \rangle$.
5. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution telle que $(u-1)T = 0$. Montrer que $T = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \delta_j$.
6. Déduire des questions précédentes que $\hat{P} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j \delta_j$, puis que $\forall j \in \mathbb{Z}, a_j = a$.

7. Appliquant \hat{P} à la fonction $\phi(y) = e^{-\pi y^2}$, montrer que $a = 1$, donc que $\hat{P} = P$ (on pourra utiliser que $\hat{\hat{\phi}} = \phi$).
8. En déduire la formule sommatoire de Poisson : pour tout $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi(j) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(j).$$

Exercice 3.10. Démontrer que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{i\lambda x} \text{vp}(1/x) = i\pi\delta_0.$$

1. Directement.
2. En utilisant la transformée de Fourier.

4 – Les théorèmes de Paley-Wiener

De ce qu'on a exposé précédemment on peut retenir le fait général suivant : la localisation en espace se traduit par de la régularité en fréquence. Cela se voit bien sur les relations de la dérivation vis-à-vis de la transformation de Fourier. On cherche maintenant à quantifier plus précisément ce fait.

Théorème 54 (Paley-Wiener, cas fonctions). Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, R)$, alors il existe $F : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $F|_{\mathbb{R}^d} = \hat{\varphi}$ et

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |F(z)| \leq C_N(1 + |z|)^{-N} e^{R|\text{Im}(z)|}$$

Réciproquement, si $F : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe satisfaisant l'inégalité alors il existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\text{supp}(\varphi) \subset B(0, R)$ et $\hat{\varphi} = F|_{\mathbb{R}^d}$.

Démonstration : On restreint la preuve au cas $d = 1$ (largement suffisant dans le cadre de l'agrégation) pour ne pas avoir à manipuler de fonctions holomorphes en plusieurs variables.

Dans le premier cas, posons pour $z \in \mathbb{C}$

$$F(z) := \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx$$

Comme $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, F est bien définie sur \mathbb{C} et par holomorphie sous l'intégrale (sur tout compact de \mathbb{C}), $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe. De plus, par construction on a $F|_{\mathbb{R}} = \hat{\varphi}$.

Concernant l'inégalité, fixons $N \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$, on a alors

$$\begin{aligned} |z|^N |F(z)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) z^N e^{-ix\xi} dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \partial_x^N (e^{-ix\xi}) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} \partial_x^N \varphi(x) e^{-ix\xi} dx \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\partial_x^N \varphi| \right) e^{R|\text{Im}(z)|} \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité.

Réciproquement, soit $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe satisfaisant l'inégalité, on peut dans un premier temps noter qu'en restreignant cette dernière aux réels, on obtient

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, |F(\xi)| \leq C_N(1 + |\xi|)^{-N}$$

F décroît donc plus vite que n'importe quel polynôme, en particulier $F \in L^1(\mathbb{R})$ et la définition suivante fait sens :

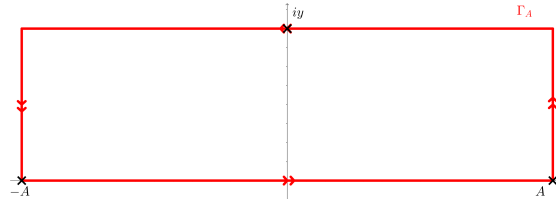
$$\varphi(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(\xi) e^{ix\xi} d\xi$$

On a même $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ par dérivation sous l'intégrale. Reste à montrer que φ est à support dans $B(0, R)$, on aura alors $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et par inversion de Fourier, $\hat{\varphi} = F|_{\mathbb{R}}$. On utilise le fait suivant :

Lemme 55.

$$\forall y \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} F(\xi + iy)e^{ix(\xi + iy)} d\xi = \int_{\mathbb{R}} F(\xi)e^{ix\xi} d\xi$$

Démonstration : Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_x : z \mapsto F(z)e^{ixz}$ est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} , il est naturel d'utiliser un argument du type théorème des résidus. Soit donc pour $A > 0$ le contour Γ_A comme ci-contre.



On a alors

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Gamma_A} f_x(z) dz &= \int_{-A}^A F(\xi)e^{ix\xi} d\xi - \int_{-A}^A F(\xi + iy)e^{ix(\xi + iy)} d\xi \\ &\quad + i \int_0^y F(A + it)e^{ix(A + it)} dt - i \int_0^y F(-A + it)e^{ix(-A + it)} dt \end{aligned}$$

Or en utilisant l'inégalité sur F on obtient

$$\left| F(A + it)e^{ix(A + it)} \right| \leq C_N(1 + A)^{-N} e^{(R + |x|)|y|}$$

qui est uniforme en t et tend vers 0 avec A . Par convergence dominée, on obtient bien l'identité annoncée. □

On peut enfin montrer que φ est à support compact. Soit $x \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ quelconque. On pose $y = \lambda \operatorname{sgn}(x)$ de sorte que $yx = \lambda|x|$ et $|y| = \lambda$. On a donc

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |f_x(\xi + iy)| d\xi \\ &\leq \frac{C_N}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{-N} d\xi e^{\lambda(R - |x|)} \end{aligned}$$

où le terme de droite tend vers 0 quand $\lambda \rightarrow +\infty$ dès que $|x| > R$, ce qui prouve bien que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B(0, R)$. □

Théorème 56 (Paley-Wiener-Schwartz, cas distributions). Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ d'ordre au plus N_0 telle que $\operatorname{supp}(T) \subset B(0, R)$, alors il existe $F : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $F|_{\mathbb{R}^d} = \hat{T}$ et

$$\exists C > 0, \forall z \in \mathbb{C}, |F(z)| \leq C(1 + |z|)^{N_0} e^{R|\operatorname{Im}(z)|}$$

Réciproquement, si $F : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe satisfaisant l'inégalité alors il existe $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\operatorname{supp}(T) \subset B(0, R)$ et $\hat{T} = F|_{\mathbb{R}^d}$.

Démonstration : La preuve suit les mêmes lignes que la précédente, à ceci près qu'il faut adapter l'argument au cadre des distributions.

Pour le sens direct, posons le candidat évident

$$F : z \in \mathbb{C} \mapsto \langle T_x, e^{-ix \cdot \xi} \rangle$$

Par holomorphie sous le crochet de dualité (sur tout compact de \mathbb{C}), F ainsi définie est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} et on a bien $F|_{\mathbb{R}} = \hat{T}$. Reste à vérifier l'inégalité. Comme $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, il existe un compact K arbitrairement proche de $\text{supp}(T)$ et une constante $C > 0$ tels que

$$|F(z)| \leq C \sup_{\alpha \leq N_0} \|\partial_x^\alpha(e^{-ixz})\|_{L^\infty(K)} \leq C_N(1+|z|)^{N_0} \sup_{x \in K} e^{|x||\text{Im}(z)|}$$

où l'exponentielle dans le terme de droite peut être majorée par $e^{R|\text{Im}(z)|}$ comme K est arbitrairement proche de $\text{supp}(T)$.

Réciproquement, si $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe satisfaisant l'inégalité, alors en restreignant cette dernière aux réels on obtient

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, |F(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^N$$

en d'autres termes, $F|_{\mathbb{R}}$ est au plus polynômiale, donc définit une distribution tempérée. Par inversion de Fourier, il existe un élément $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ tel que $\hat{T} = F|_{\mathbb{R}}$. Reste à montrer que T est bien à support compact dans $B(0, R)$.

On utilise pour cela une identité approchée : soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\chi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} \chi = 1$ et $\text{supp}(\chi) \subset B(0, 1)$, on pose alors $\chi_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} \chi(\cdot/\varepsilon)$. Comme χ_ε est à support compact dans $B(0, \varepsilon)$, la version fonctions du théorème assure que $\widehat{\chi_\varepsilon} = \hat{\chi}(\varepsilon \cdot)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} qui vérifie

$$\forall z \in \mathbb{C}, |\widehat{\chi_\varepsilon}(z)| \leq C_N(1+|z|)^{-N} e^{\varepsilon|\text{Im}(z)|}$$

Comme F satisfait une inégalité similaire, on a

$$|F\widehat{\chi_\varepsilon}(z)| \leq C'_N(1+|z|)^{N_0-N} e^{(\varepsilon+R)|\text{Im}(z)|}$$

et de plus $F\widehat{\chi_\varepsilon}$ est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} . Toujours d'après la version fonction du théorème, il existe donc une fonction $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B(0, R+\varepsilon)$ et $\widehat{\varphi_\varepsilon} = F\widehat{\chi_\varepsilon}|_{\mathbb{R}}$. On montre maintenant que $\text{supp}(T) \subset B(0, R)$, il suffit de montrer que T est nulle sur toute fonction test dont le support est hors de la boule.

Soit pour cela $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp}(\psi) \subset \{|x| > R\}$, le support de ψ étant compact, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\text{supp}(\psi) \subset \{|x| \geq R + \eta\} \subset \{|x| > R\}$$

En particulier, dès que $\varepsilon < \eta$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x)\varphi_\varepsilon(x) = 0$$

De sorte que, en utilisant inversion de Fourier et convergence dominée (χ_ε étant une approximation de l'unité)

$$\begin{aligned} \langle T, \psi \rangle &= \langle \hat{T}, \overline{\mathcal{F}\psi} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} F(\xi) \overline{\mathcal{F}\psi}(\xi) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} (F\widehat{\chi_\varepsilon})(\xi) \overline{\mathcal{F}\psi}(\xi) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi_\varepsilon}(\xi) \overline{\mathcal{F}\psi}(\xi) d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(x) \psi(x) dx = 0 \end{aligned}$$

et donc $\text{supp}(T) \subset B(0, R)$.

□

On tire 2 faits généraux de ces théorèmes :

- la localisation en espace se traduit par de la régularité en fréquence
- on ne peut pas localiser en espace et en fréquence simultanément (car une fonction entière ne peut être nulle sur un ouvert)

Comme conséquence directe du théorème de Paley-Wiener-Schwartz on obtient l'analogie d'un fait bien connu pour les fonctions réelles

Proposition 57. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ vérifiant

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \langle T, x^\alpha \rangle = 0$$

alors $T = 0$.

Démonstration : Soit $F : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe donnée par le théorème précédent telle que $F|_{\mathbb{R}^d} = \hat{T}$. Alors F est donnée par

$$F(z) = \langle T_x, e^{-ix \cdot z} \rangle$$

En passant la dérivée sous le crochet et évaluant en 0, on a alors

$$\partial_z^\alpha F(0) = \langle T_x, (-ix)^\alpha \rangle = 0$$

Or la fonction F est entière, donc est égale à sa série de Taylor, qui est nulle par ce qui précède. Par injectivité de $T \mapsto \hat{T}$, on obtient alors que $T = 0$. □

Autre résultat de localisation, les inégalités de Bernstein (dans leur version allégée).

Proposition 58. Soit $a \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\text{supp}(\hat{a}) \subset B(0, R)$. Alors $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ et

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \exists C_\alpha > 0, \|\partial^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C_\alpha R^{|\alpha|} \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

Démonstration : \hat{a} est à support compact donc $\hat{a} = (2\pi)^d \tilde{a}$ est une fonction lisse, d'où $a \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Soit maintenant $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\psi \equiv 1$ sur $B(0, 1)$ et $\text{supp}(\psi) \subset B(0, 2)$, on pose $\psi_R := \psi(\cdot/R)$. Comme $\psi_R \equiv 1$ sur $\text{supp}(\hat{a})$, on

$$a \star \widehat{\mathcal{F}\psi_R} = \hat{a} \cdot \psi_R = \hat{a}$$

de sorte que $a = a \star \overline{\mathcal{F}\psi_R}$ et donc $\partial^\alpha a = a \star \partial^\alpha(\overline{\mathcal{F}\psi_R})$. Comme

$$\partial^\alpha(\overline{\mathcal{F}\psi_R}) = R^d \partial^\alpha((\overline{\mathcal{F}\psi})(R \cdot)) = R^{d+|\alpha|} \partial^\alpha(\overline{\mathcal{F}\psi})(R \cdot)$$

on a

$$\|\partial^\alpha(\overline{\mathcal{F}\psi_R})\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = R^{|\alpha|} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha \overline{\mathcal{F}\psi} \right)$$

et finalement

$$\|\partial^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} R^{|\alpha|} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha \overline{\mathcal{F}\psi} \right)$$

□

5 – Espaces de Sobolev et problèmes elliptiques

On s'intéresse dans cette dernière partie à la construction des espaces de Sobolev, la motivation derrière étant de résoudre des problèmes aux dérivées partielles. L'idée clé est la suivante : si on souhaite travailler dans L^2 pour avoir accès à la structure hilbertienne, mais également manipuler des dérivées (au sens faible), on va considérer des espaces de fonctions dont les dérivées sont elles-mêmes L^2 .

5.1 – Espaces de Sobolev : cas d'un ouvert de \mathbb{R}^d

On construit ici l'espace $H^m(\Omega)$ en suivant l'idée de "dérivée dans L^2 ", les choses pouvant être présentées de façon légèrement différentes si $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Définition 59. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert, $m \in \mathbb{N}$, on définit l'espace de Sobolev

$$H^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega), \forall |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\}$$

muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m} := \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2}$$

On vérifie facilement qu'on a ainsi défini un produit scalaire (ou hermitien) sur $H^m(\Omega)$ qui vérifie de plus que $\|u\|_{H^{m'}(\Omega)} \leq \|u\|_{H^m(\Omega)}$. Autrement dit, $H^m(\Omega)$ s'injecte continûment dans $H^{m'}(\Omega)$ dès que $m' \leq m$. L'espace étant basé sur la structure de $L^2(\Omega)$, on montre qu'il est complet. On résume cette observation (et d'autres résultats importants) dans la proposition suivante.

Proposition 60.

— On les inclusions continues suivantes (si $m' \leq m$)

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset H^{m'}(\Omega),$$

- $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable,
- $H_c^m(\mathbb{R}^d) := H^m(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^m(\mathbb{R}^d)$,
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H_c^m(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration :

- l'injection $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega)$ a déjà été discutée, $\mathcal{S}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ découle de la définition même de $\mathcal{S}(\Omega)$: une fonction de $\mathcal{S}(\Omega)$ et toutes ses dérivées seront dans $L^2(\Omega)$, et $H^m(\Omega) \subset H^{m'}(\Omega)$ est immédiat en notant que $\|\cdot\|_{H^{m'}(\Omega)} \leq \|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ pour $m' \leq m$.
- Soit (u_n) une suite de Cauchy dans $H^m(\Omega)$, alors pour tout multi-indice $|\alpha| \leq m$, $(\partial^\alpha u_n)$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$. $L^2(\Omega)$ étant complet, il existe des fonctions $u, v_\alpha \in L^2(\Omega)$ telles que $u_n \rightarrow u$ et $\partial^\alpha u_n \rightarrow v_\alpha$ dans $L^2(\Omega)$ pour tout $0 < |\alpha| \leq m$. Mais alors, on a également $u_n \rightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et par continuité $\partial^\alpha u_n \rightarrow \partial^\alpha u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme $\partial^\alpha u_n \rightarrow v_\alpha$ dans $L^2(\Omega)$, on a donc $\partial^\alpha u = v_\alpha \in L^2(\Omega)$ avec égalité dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et donc dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, on a bien

$$\forall |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u_n \rightarrow \partial^\alpha u \text{ dans } L^2(\Omega)$$

c'est à dire la convergence dans $H^m(\Omega)$: $H^m(\Omega)$ est donc complet.

- Soit $u \in H^m(\mathbb{R}^d)$, $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction plateau telle que $\chi \equiv 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\chi \equiv 0$ pour $|x| > 2$. On définit alors $u_\varepsilon(x) := u(x)\chi(\varepsilon x)$ de sorte que $u_\varepsilon \in H_c^m(\mathbb{R}^d)$ et $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $H^m(\mathbb{R}^d)$.
- Soit $u \in H_c^m(\mathbb{R}^d)$, (ρ_ε) une approximation de l'unité, alors $u_\varepsilon := u \star \rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $H^m(\mathbb{R}^d)$.

□

En regard du dernier point, on notera le fait crucial suivant : $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est **pas dense** dans $H^m(\Omega)$ si $\Omega \neq \mathbb{R}^d$. Cela motive la définition suivante.

Définition 61.

$$H_0^m(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}$$

où l'adhérence est prise pour la norme de $H^m(\Omega)$.

Etant fermé dans $H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$ hérite de sa structure d'espace de **Hilbert**.

Remarque : Moralement, les fonctions de $H_0^m(\Omega)$ sont les fonctions $H^m(\Omega)$ qui sont "nulles sur le bord $\partial\Omega$ ". Cette formulation n'a évidemment de sens que si les fonctions en jeu sont au moins continues (c'est à dire pour $d < 2m$), mais donne tout de même l'idée derrière la définition.

On considère dans la suite Ω un ouvert **borné** de classe C^1 , de sorte que le choix de travailler avec $H_0^1(\Omega)$ ait un intérêt. On démontre alors deux résultats fondamentaux.

Proposition 62 (Inégalité de Poincaré). Il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Démonstration : Par densité, il suffit de prouver l'inégalité sur $\mathcal{D}(\Omega)$, fixons donc $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Ω étant borné, il existe un rayon $R > 0$ tel que $\Omega \subset B(0, R)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on écrira $x = (x_1, \dots, x_d) = (x_1, x')$ où $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$. Alors, u étant à support compact inclus dans $B(0, R)$, pour $x \in \Omega$ on a

$$u(x) = \int_{-R}^{x_1} \partial_{x_1} u(t, x') dt$$

et par Cauchy-Schwarz

$$|u(x)|^2 \leq |x_1 + R| \int_{-R}^{x_1} |\partial_{x_1} u(t, x')|^2 dt \leq 2R \int_{\mathbb{R}} |\partial_{x_1} u(t, x')|^2 dt$$

puis en intégrant sur $\Omega \subset \{|x_1| \leq R, x' \in \mathbb{R}^{d-1}\}$

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq 2R \int_{|x_1| \leq R, x' \in \mathbb{R}^{d-1}} \int_{\mathbb{R}} |\partial_{x_1} u(t, x')|^2 dt dx_1 dx'$$

par Fubini (u étant C^∞ à support compact dans Ω) et en notant que $|\partial_{x_1} u| \leq |\nabla u|$ on a

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq 4R^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\partial_{x_1} u(x)|^2 dx \leq 4R^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

□

Comme corollaire direct vient le fait suivant :

Corollaire 63. Les normes $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$ sont équivalentes sur $H_0^1(\Omega)$.

Un intérêt de l'espace $H_0^1(\Omega)$ est donc le suivant : contrôler la dérivée de la fonction dans $L^2(\Omega)$ suffit à contrôler la fonction elle-même, dans $L^2(\Omega)$ et donc dans $H_0^1(\Omega)$. Autre point important sur ces espaces : on a vu que les inclusions entre $H^m(\Omega)$ étaient continues, il s'avère que la "perte" de régularité de $H^m(\Omega)$ à $H^{m'}(\Omega)$ permet en fait de prouver que ces injections sont **compactes**.

Théorème 64 (Rellich). L'injection

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

est **compacte**.

Remarque : En d'autres termes, les parties **bornées** de $H_0^1(\Omega)$ sont **relativement compactes** dans $L^2(\Omega)$ (et donc précompactes). En pratique, cela se traduit par les deux propriétés suivantes :

- de toute suite de $H_0^1(\Omega)$ bornée on peut extraire une sous-suite $L^2(\Omega)$ convergente,
- toute suite faiblement convergente de $H_0^1(\Omega)$ converge fortement dans $L^2(\Omega)$.

La preuve du théorème de Rellich s'appuie sur le résultat de compacité suivant (dont on trouvera une preuve dans [1]), variante L^p du théorème d'Ascoli :

Théorème 65 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov). Soit $p \geq 1$ et $B \subset L^p(\mathbb{R}^d)$. B est relativement compacte (et donc précompacte) dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ **si et seulement si** :

- B est bornée dans $L^p(\mathbb{R}^d)$
- $\int_{|x| > R} |f(x)|^p dx \rightarrow 0$ quand $R \rightarrow +\infty$, uniformément en $f \in B$
- $\|\tau_a f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$ quand $|a| \rightarrow 0$, uniformément en $f \in B$

Démonstration : On montre que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$, comme la restriction $L^2(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est continue, on aura bien l'injection compacte voulue.

Soit $B = \overline{B_{H_0^1(\Omega)}(0,1)}$ et $\tilde{B} := \{\tilde{f}, f \in B\}$ où \tilde{f} désigne le prolongement de $f \in H_0^1(\Omega)$ par 0 en dehors de Ω . Comme nos fonctions sont dans $H_0^1(\Omega)$, ce prolongement est bien défini de $H_0^1(\Omega)$ dans $H_c^1(\mathbb{R}^d)$. On applique le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov à \tilde{B} :

- par définition de la norme $H^1(\Omega)$, on a directement que \tilde{B} est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^d)$
- pour $f \in B$ et $R > 0$ assez grand tel que $\Omega \subset B(0, R)$, on a

$$\int_{|x|>R} |\tilde{f}(x)|^2 dx = 0$$

- pour $f \in B$, $a \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} \|\tau_a \tilde{f} - \tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\tau_a \tilde{f}(x) - \tilde{f}(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(a \cdot \int_0^1 \nabla \tilde{f}(x + ta) dt \right)^2 dx \\ &\leq |a|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 |\nabla \tilde{f}(x + ta)|^2 dt dx \\ &\leq |a|^2 \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

et $\|f\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$ assure que la convergence vers 0 est bien uniforme en $f \in B$. Ainsi, \tilde{B} est relativement compacte dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et donc $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. □

Remarque : Du théorème de Rellich, on peut, sans calcul, retrouver l'inégalité de Poincaré.

Supposons l'inégalité fautive, alors il existe une suite $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{n}$$

(u_n) est donc bornée dans $H^1(\Omega)$: il existe une sous suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge dans $L^2(\Omega)$ vers un certain $v \in L^2(\Omega)$, en particulier $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Mais alors, comme $\nabla u_{\varphi(n)} \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$, on a $\nabla v = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et donc dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, $u_{\varphi(n)} \rightarrow v$ dans $H^1(\Omega)$ et alors $v \in H_0^1(\Omega)$. De plus, on a $v = \text{cste}$ sur Ω de sorte que $v \equiv 0$: incompatible avec $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$.

On peut même montrer le résultat plus général suivant (voir [1] pour une démonstration) :

Théorème 66 (Rellich-Kondrakov). On a les injections compactes suivantes :

- Si $d = 1$: $H^1(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$
- Si $d = 2$: $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \geq 1$
- Si $d \geq 3$: $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, \frac{2d}{d-2})$

Cette vision au travers des dérivées a l'avantage d'être intuitive mais trouve assez vite ses limites quand on s'intéresse à l'exposant $m \in \mathbb{N}$: que se passe-t-il pour $m \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$? que se passe-t-il pour $m < 0$? Ces questions sont difficiles à traiter dans le cas d'un ouvert général, la première pourrait être répondue par interpolation des espaces $L^2(\Omega)$ et $H^n(\Omega)$ pour un n assez grand, la deuxième en voyant $H^{-m}(\Omega)$ comme le dual de $H_0^m(\Omega)$, mais ces deux méthodes sont techniques et difficiles.

5.2 – Espaces de Sobolev : cas de l'espace entier \mathbb{R}^d

On travaille ici dans l'espace tout entier \mathbb{R}^d avec comme ajout notable l'accès à la transformée de Fourier. Gardant en tête le fait que \mathcal{F} échange dérivation et multiplication polynomiale, on propose une définition alternative dans ce cas.

Définition 67. Pour $s \in \mathbb{R}$ on définit

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), (1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

munit du produit scalaire

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi) \overline{\hat{v}(\xi)} d\xi$$

Notons que cette fois, les éléments en jeu sont à priori des distributions. Pour $s \geq 0$, le poids $(1 + |\xi|^2)^s$ étant polynomial on est bien assuré de retrouver *in fine* des fonctions $L^2(\mathbb{R}^d)$. Cette généralité prend donc sens quand on considère $s < 0$, dans ce cas on autorise à \hat{u} d'exploser loin de zéro (le poids ayant pour effet de compenser cette explosion) et rien n'assure à priori qu'on récupère alors $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On manipule donc dans ce cas des distributions tempérées.

De cette nouvelle définition découlent des propriétés similaires à celles qu'on a déjà observées :

Proposition 68.

- si $s' \leq s$, l'inclusion $H^s(\mathbb{R}^d) \subset H^{s'}(\mathbb{R}^d)$ est continue,
- pour tout $s \in \mathbb{R}$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un Hilbert,
- les deux définitions coïncident quand $\Omega = \mathbb{R}^d$ et $s \in \mathbb{N}$ et les normes sont équivalentes.

Démonstration :

- comme $(1 + |\xi|^2)^{s/2}$ est croissante en $s \in \mathbb{R}$, on a $\|\cdot\|_{H^{s'}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\cdot\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$ dès que $s' \leq s$, d'où l'inclusion continue.
- soit (u_n) une suite de Cauchy dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $(1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{u_n}$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et donc $\widehat{u_n}$ est de Cauchy dans l'espace à poids $L^2(\mathbb{R}_\xi^d, (1 + |\xi|^2)^{m/2})$. Cet espace étant complet, il existe $v \in L^2(\mathbb{R}_\xi^d, (1 + |\xi|^2)^{m/2})$ tel que $\widehat{u_n} \rightarrow v$ dans $L^2(\mathbb{R}_\xi^d, (1 + |\xi|^2)^{m/2})$. Or $v \in L^2(\mathbb{R}_\xi^d, (1 + |\xi|^2)^{m/2}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, donc il existe une distribution $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\hat{u} = v$ et alors

$$\widehat{u_n} \rightarrow \hat{u} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_\xi^d, (1 + |\xi|^2)^{m/2}), \text{ i.e. } (1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{u_n} \rightarrow (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{u} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^d)$$

on a donc bien $u_n \rightarrow u$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$: $H^s(\mathbb{R}^d)$ est complet.

- si $s = m \in \mathbb{N}$, il suffit de noter qu'il existe des constantes $C_m, C'_m > 0$ telles que

$$C_m \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \leq (1 + |\xi|^2)^m \leq C'_m \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2$$

de sorte que le lien entre transformation de Fourier et dérivation permet de conclure \square

Remarque : Notons que dans le cas de l'espace tout entier $\Omega = \mathbb{R}^d$, on a $H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$, il n'y a donc pas de résultat propres à ces espaces dans le cas \mathbb{R}^d .

5.3 – Problèmes elliptiques

On s'intéresse dans cette partie à la mise en oeuvre de toute la machinerie développée jusqu'ici pour étudier des problèmes elliptiques du type

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = f(\cdot, u) & \text{sur } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

L'étude de ce type de problèmes, loin d'être triviale, peut tout de même se simplifier dans certains cas. Prenons à titre d'exemple le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$, $q \equiv 1$ et $f(\cdot, u) = f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, autrement dit, le problème est linéaire et posé sur l'espace tout entier. Alors en appliquant la transformée de Fourier (dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ à priori), on obtient qu'une distribution tempérée u solution du problème doit vérifier

$$(1 + |\xi|^2)\hat{u} = \hat{f}$$

de sorte que u est donnée par la formule

$$u = \mathcal{F}^{-1} \left[(1 + |\xi|^2)^{-1} \hat{f} \right]$$

Réciproquement, on vérifie facilement qu'ainsi définie, $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ et est solution du problème $-\Delta u + u = f$.

Dans le cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un ouvert borné, on n'a plus accès à la transformée de Fourier, l'étude n'est donc plus si simple et requiert des outils d'analyse fonctionnelle spécifiques.

Cas $q = 0$ et $f(\cdot, u) = f$:

On veut résoudre ici le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné C^1 et $f \in L^2(\Omega)$. La formulation faible (i.e. au sens des distributions) d'un tel problème s'écrit :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}$$

qu'on peut écrire en un problème au sens faible sur $H_0^1(\Omega)$:

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_{\Omega} f \varphi$$

L'inégalité de Poincaré assure que la structure hilbertienne de $H_0^1(\Omega)$ donnée par $\|\nabla \cdot\|_{L^2(\Omega)}$ est équivalente à celle héritée de $H^1(\Omega)$, on peut donc finalement réécrire le problème (en prenant $v = \varphi$) :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), (u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)}$$

Comme $v \in H_0^1(\Omega) \mapsto (f, v)_{L^2(\Omega)}$ est une forme antilinéaire continue, le théorème de représentation de Riesz assure l'existence et l'unicité d'un vecteur $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (f, v)_{L^2(\Omega)}$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$, d'où le résultat suivant

Proposition 69. *Pour $f \in L^2(\Omega)$, il existe une **unique solution faible** $H_0^1(\Omega)$ au problème*

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega$$

de plus cette solution satisfait $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$.

On peut donc facilement définir un opérateur inverse pour Δ qui soit borné.

Proposition 70. *L'opérateur $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ qui à $f \in L^2(\Omega)$ associe l'unique solution $H_0^1(\Omega)$ du problème ci dessus, est un **opérateur borné** de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$. C'est même un **opérateur compact** de $L^2(\Omega)$ dans lui-même.*

Démonstration : La continuité découle de l'estimée du théorème de Riesz, la compacité est obtenue en combinant avec le théorème de Rellich. □

Remarque : On peut même remarquer que cet opérateur est **autoadjoint et positif**, de sorte que, en appliquant le théorème spectral, il existe une suite de réels positifs (λ_k) qui tend vers $+\infty$ et une suite de fonctions (φ_k) qui forment une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ tels que

$$\forall k \geq 1, \quad -\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$$

On peut également montrer que les fonctions φ_k sont C^∞ .

Cas non-symétrique avec $q = 0$ et $f(\cdot, u) = f$:

Remarquons que dans le cas précédent, la symétrie de l'opérateur $-\Delta$ permet d'écrire le problème directement sous la forme du théorème de Riesz, ce qui tombe en défaut dès que l'opérateur ne définit pas un produit scalaire. Prenons $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ et considérons l'opérateur différentiel générique

$$\mathcal{L} := \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} (a_{i,j} \partial_{x_j})$$

on supposera que cet opérateur est **elliptique** (ou coercif) dans le sens où il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{i,j=1}^d a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$$

En suivant la même démarche que précédemment le problème

$$\begin{cases} -\mathcal{L}u = f & \text{sur } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

s'écrit au sens faible sur $H_0^1(\Omega)$ en

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{i,j} (\partial_{x_i} u) (\partial_{x_j} v) = \int_{\Omega} f v$$

Dans ce cadre, rien n'assure que le terme de gauche soit un produit scalaire sur $H_0^1(\Omega)$, on utilise alors le théorème de Lax-Milgram dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ pour la forme linéaire

$$L : v \in H_0^1(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} f v$$

et la forme bilinéaire

$$a : (u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} a_{i,j} (\partial_{x_i} u) (\partial_{x_j} v)$$

L est une forme linéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$ car continue pour la norme $L^2(\Omega)$. Concernant a , c'est bien une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$. En effet en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$|a(u, v)| \leq \sum_{i,j=1}^d \|a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\partial_{x_i} u| |\partial_{x_j} v| \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

On montre également que a est coercive, ce qui découle directement de la coercivité de \mathcal{L} et de l'inégalité de Poincaré :

$$a(u, u) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^d a_{i,j} (\partial_{x_i} u) (\partial_{x_j} u) \geq \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \alpha \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2$$

Le théorème assure donc l'existence et l'unicité d'un vecteur $u \in H_0^1(\Omega)$ vérifiant $a(u, v) = L(v)$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ ce qu'on résume dans le théorème suivant.

Théorème 71. Soit $f \in L^2(\Omega)$, $\mathcal{L} := \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} (a_{i,j} \partial_{x_j})$ un opérateur α -elliptique, alors il existe une **unique solution faible** $H_0^1(\Omega)$ au problème

$$-\mathcal{L}u = f \quad \text{sur } \Omega$$

et cette solution u vérifie de plus $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{L^2(\Omega)}$

On peut même considérer le cas où $q \in L^\infty(\Omega)$ est positif de sorte que le problème

$$-\mathcal{L}u + qu = f \quad \text{sur } \Omega$$

admet encore une unique solution $H_0^1(\Omega)$ par les mêmes arguments.

Exemple 72. Soit $a \in C_b^1(0,1)$ tel que $a(x) > \alpha$ pour un certain $\alpha > 0$ pour $x \in (0,1)$, alors l'opérateur $\mathcal{L} = a \partial_{xx}^2 + a' \partial_x$ est α -elliptique. En effet, $\mathcal{L} = \partial_x(a \partial_x)$ et alors $a(x)\xi^2 \geq \alpha \xi^2$. Ainsi, pour tout $q \in L^\infty(0,1)$ à valeurs positives et $f \in L^2(0,1)$, le problème aux limites

$$-au'' - a'u' + qu = f \quad \text{et} \quad u(0) = u(1) = 0$$

admet une unique solution dans $H_0^1(0,1)$.

Les cas non-linéaire :

On suppose maintenant que $f(\cdot, u) = f(u)$ pour une certaine fonction $f \in C_b^0(\mathbb{R})$. Dès lors le problème est non-linéaire et tous les outils précédents tombent en défaut pour étudier le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{sur } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

On veut ici s'appuyer sur des méthodes de point fixe, en effet l'équation ci-dessus se réécrit

$$u = (-\Delta)^{-1}(f(u)) =: T(u)$$

Pour tenter un raisonnement par point fixe, on doit au moins s'assurer que l'application T est bien définie et continue, ce qui revient à dire que $u \mapsto f \circ u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est elle-même continue.

Lemme 73. Soit $f \in C_b^0(\mathbb{R})$, alors l'application $u \in L^2(\Omega) \mapsto f \circ u \in L^2(\Omega)$ est continue sur $L^2(\Omega)$.

Démonstration : Soit $(u_n) \subset L^2(\Omega)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $L^2(\Omega)$ et une suite extraite $(u_{n'})$. Alors il existe une sous-sous-suite $(u_{n''})$ telle que $u_{n''} \rightarrow u$ presque partout, de sorte que par continuité de f , on a $f \circ u_{n''} \rightarrow f \circ u$ presque partout sur Ω . De plus, f étant bornée et Ω aussi, on a par convergence dominée que

$$\|f \circ u_{n''} - f \circ u\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$$

Ainsi, pour toute suite extraite de $(f \circ u_n)$, il existe une sous-sous-suite qui converge vers $f \circ u$ dans $L^2(\Omega)$, d'où la convergence de toute la suite. □

Ainsi, l'application

$$T : \begin{cases} L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \\ u \mapsto (-\Delta)^{-1}(f(u)) \end{cases}$$

est continue. On pourrait alors tenter un argument de point fixe de Banach, mais cela nécessiterait une condition de petitesse sur f pour espérer retrouver une application contractante. Au prix de l'unicité, on propose ici une méthode basée sur le point fixe de Schauder.

Théorème 74 (Schauder). Soit E un Banach, C un convexe fermé non-vide et $T : C \rightarrow C$ une application continue telle que $\overline{T(C)}$ soit compact. Alors il existe $x \in C$ tel que $T(x) = x$.

Ce qui donne le résultat suivant :

Théorème 75. Soit $f \in C_b^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, alors le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{sur } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

admet une **solution faible** $H_0^1(\Omega)$. Si de plus f est **décroissante**, alors cette solution est **unique**.

Démonstration : Considérons l'application T définie comme plus haut, mais partant de $H_0^1(\Omega)$, alors c'est une application continue, et même compacte par Rellich, reste à déterminer un convexe C qui convient. Soit $M > 0$ à fixer plus tard et $C = \overline{B_{H_0^1(\Omega)}(0, M)}$, pour $u \in C$, $T(u)$ est l'unique solution faible $H_0^1(\Omega)$ de $-\Delta v = f(u)$, ainsi

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla T(u) \cdot \nabla w = \int_{\Omega} f(u)w$$

En particulier en prenant $w = T(u)$, on obtient

$$\|T(u)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} f(u)T(u) \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |\Omega|^{1/2} \|T(u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega, f} \|T(u)\|_{H_0^1(\Omega)}$$

et donc finalement $\|T(u)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_{\Omega, f}$. En choisissant $M \geq C_{\Omega, f}$, on a bien $T(C) \subset C$ et donc par Schauder, il existe $u \in C$ vérifiant $T(u) = u$, c'est à dire une solution faible $H_0^1(\Omega)$ de $-\Delta u = f(u)$.

Si maintenant f est décroissante, considérons 2 solutions faibles u et v dans $H_0^1(\Omega)$. Alors on a $T(u) = u$ et $T(v) = v$ de sorte que

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &= \|T(u) - T(v)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla(T(u) - T(v))|^2 \\ &= \int_{\Omega} \nabla(T(u) - T(v)) \cdot \nabla(u - v) \\ &= \int_{\Omega} (f(u) - f(v))(u - v) \leq 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $w := T(u) - T(v)$ est solution faible de $-\Delta w = f(u) - f(v)$ et que f est décroissante. On a donc $\|u - v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$, c'est à dire $u = v$. □

Références

- [1] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*. Dunod (2020).
- [2] F. Golse *Distributions, analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles*. 2ditions de l'école Polytechnique (2020).
- [3] F. Hirsch, G. Lacombe *Eléments d'analyse fonctionnelle*. Dunod (2009).
- [4] W.Rudin *Functional Analysis*. McGraw-Hill (1991)
- [5] C. Zuily, *Eléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles*. Dunod (2002).
- [6] C. Zuily, *Problèmes de distributions et d'équations aux dérivées partielles*. Cassini (2010).