Feuille d'exercices n° 1

Espaces de Lebesgue

Dans tout ce qui suit, $N \in \mathbf{N}^*$, 0_N note l'origine de $\mathbf{R}^N$, et les normes sur $\mathbf{R}^N$ sont les normes euclidiennes canoniques.

Exercise 1. *Monômes.*
Soit $\sigma \in \mathbf{R}$ et $1 \le p \le \infty$. Considérons

$$f : B(0_N, 1) \setminus \{0_N\} \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \|x\|^\sigma , \qquad \text{et} \qquad g : \mathbf{R}^N \setminus \overline{B}(0_N, 1) \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \|x\|^\sigma .$$

1. À quelle condition a-t-on $f \in L^p(B(0_N, 1) \setminus \{0_N\})$?
2. À quelle condition a-t-on $g \in L^p(\mathbf{R}^N \setminus \overline{B}(0_N, 1))$?

Exercise 2. *Opérateur de multiplication.*
Soit (E, μ) un espace mesuré σ-fini, $m : E \to \mathbf{R}$ mesurable et $1 \le p \le \infty$.
Pour tout $u : E \to \mathbf{R}$ mesurable, on note $T_m(u) := m\, u$.

1. À quelle condition sur m a-t-on $T_m(u) \in L^p(E)$ pour tout $u \in L^p(E)$?
2. Dans ce cas, que vaut la norme d'opérateur $\|T_m\|_{L^p(E) \to L^p(E)}$?

Exercise 3. *Interpolation complexe.*
Pour on pose

$$\Delta_{a,b} := \{ z \in \mathbf{C} ; a < \mathrm{Re}(z) < b \} , \qquad \mathcal{D}_\alpha := \{ z \in \mathbf{C} ; \mathrm{Re}(z) = \alpha \} ,$$

où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. Donner un exemple de fonction complexe f non bornée, continue sur $\overline{\Delta_{0,1}}$, holomorphe sur $\Delta_{0,1}$ telle que $f_{|\mathcal{D}_0}$ et $f_{|\mathcal{D}_1}$ soient bornés.
2. Montrer que si f est une fonction complexe continue et bornée sur $\overline{\Delta_{0,1}}$, holomorphe sur $\Delta_{0,1}$, alors pour tout $0 \le \theta \le 1$
$$\sup_{\mathcal{D}_\theta} |f| \le \left(\sup_{\mathcal{D}_0} |f| \right)^{1-\theta} \left(\sup_{\mathcal{D}_1} |f| \right)^{\theta} .$$
3. Soit (E, μ) et (F, ν) deux espaces mesurés σ-finis. Soit $1 \le p_0, p_1 \le \infty$ et $1 \le q_0, q_1 \le \infty$ et une application linéaire
$$T : L^{p_0}(E) + L^{p_1}(E) \to L^{q_0}(F) + L^{q_1}(F)$$
telle que $T(L^{p_0}(E)) \subset L^{q_0}(F)$ et $T(L^{p_1}(E)) \subset L^{q_1}(F)$.
Soit $0 \le \theta \le 1$. On définit $1 \le p_\theta \le \infty$ et $1 \le q_\theta \le \infty$ par
$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} , \qquad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} .$$

(a) Rappeler pourquoi $L^{p_\theta}(E) \subset L^{p_0}(E) + L^{p_1}(E)$.

(b) Soit g une fonction simple mesurable sur E de support de mesure finie et h une fonction simple mesurable sur F de support de mesure finie. Montrer qu'il existe f une fonction complexe continue et bornée sur $\overline{\Delta_{0,1}}$, holomorphe sur $\Delta_{0,1}$, telle que

$$f(\theta) = \int_F T(g)\, h \,\mathrm{d}\nu\,,$$

et

$$\sup_{\mathcal{D}_0} |f| \leq \|T\|_{L^{p_0}\to L^{q_0}} \|g\|_{L^{p_\theta}}^{\frac{p_\theta}{p_0}} \|h\|_{L^{q'_\theta}}^{\frac{q'_\theta}{q'_0}}\,, \qquad \sup_{\mathcal{D}_1} |f| \leq \|T\|_{L^{p_1}\to L^{q_1}} \|g\|_{L^{p_\theta}}^{\frac{p_\theta}{p_1}} \|h\|_{L^{q'_\theta}}^{\frac{q'_\theta}{q'_1}}\,,$$

où, pour $r \in [1,\infty]$, r' est l'indice de Lebesgue dual de r.

(c) En déduire que $T(L^{p_\theta}(E)) \subset L^{q_\theta}(F)$ et que

$$\|T\|_{L^{p_\theta}\to L^{q_\theta}} \leq \left(\|T\|_{L^{p_0}\to L^{q_0}}\right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{L^{p_1}\to L^{q_1}}\right)^{\theta}\,.$$

4. Redémontrer les inégalités de Young sur les produits de convolution à partir du résultat de la question précédente.

5. Soit (E,μ) et (F,ν) deux espaces mesurés σ-finis et $K : E \times F \to \mathbf{R}$ telle que pour presque tout $x \in E$, $K(x,\cdot) \in L^1(F)$ et pour presque tout $y \in F$, $K(\cdot,y) \in L^1(E)$ avec

$$\|K\|_{L^\infty(E;L^1(F))} := \mathrm{esssup}_{x\in E} \|K(x,\cdot)\|_{L^1(F)} < +\infty$$

et

$$\|K\|_{L^\infty(F;L^1(E))} := \mathrm{esssup}_{y\in F} \|K(\cdot,y)\|_{L^1(E)} < +\infty\,.$$

Montrer que l'application

$$(L^1 \cap L^\infty)(F) \to (L^1 \cap L^\infty)(E)\,, \qquad f \mapsto \int_F K(\cdot,y)\, f(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

est bien définie et peut être étendue en une application $T : L^2(F) \to L^2(E)$ avec

$$\|T\|_{L^2(F)\to L^2(E)} \leq \left(\|K\|_{L^\infty(E;L^1(F))}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|K\|_{L^\infty(F;L^1(E))}\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$