Université de Rennes Semestre printemps 2023-2024

M1 Maths fondamentales Analyse avancée

Feuille d'exercices n° 4

Quelques calculs de Fourier & Laplace

Exercise 1. *Théorème central limite.* Soit (Ω, μ) un espace de probabilité et $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire réelle. On note μ_X la loi de X et F la transformée de Fourier [1] de μ_X.

On considère $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi μ_X.

1. Pour tout $N \in \mathbf{N}^\star$, on note F_N la transformée de Fourier de la loi de $(X_1 + \cdots + X_N)/\sqrt{N}$. Exprimer F_N en fonction de F.
2. On suppose que μ_X possède des moments juqu'à l'ordre 2 et que X est de moyenne nulle. Montrer que F_N converge uniformément sur tout compact lorsque $N \to \infty$.
3. Calculer la transformée de Fourier inverse de la limite précédente.

Exercise 2. *Calcul de $\zeta(2)$.*

1. Pour $a > 0$ calculer les transformées de Fourier de $\mathrm{e}^{-a\,(\cdot)}\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_+}$ et de $\mathrm{e}^{a\,(\cdot)}\,\mathbf{1}_{\mathbf{R}_-}$.
2. En déduire la transformée de Fourier inverse de $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\xi \mapsto (1+\xi^2)^{-1}$.
3. Déterminer une équation différentielle (au sens des distributions) vérifiée par cette transformée de Fourier inverse et en déduire un calcul alternatif.
4. Pour tout $T > 0$, calculer
$$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi\, k}{T}\right)^2}\,.$$
5. En déduire une expression plus explicite de
$$\zeta(2) := \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{1}{n^2}\,.$$

Exercise 3. *Introduction à la transformée de Laplace.*

Soit $d \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbf{C})$. On notera $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre unitaire sur $\mathcal{M}_d(\mathbf{C})$.

1. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\lambda) > \|A\|$, la fonction $\mathbf{R}_+ \to \mathcal{M}_d(\mathbf{C})$, $t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\, t}\mathrm{e}^{t\,A}$ est intégrable et calculer son intégrale.
2. Montrer que $\mathbf{C} \setminus \sigma(A) \to \mathcal{M}_d(\mathbf{C})$, $\lambda \mapsto (\lambda\,\mathrm{I}_d - A)^{-1}$ est analytique.
3. Montrer que $(\lambda\,\mathrm{I}_d - A)^{-1}$ se développe en puissances de λ^{-1} quand $|\lambda| > \|A\|$.
4. Montrer que si $r > \|A\|$, et Γ_r note un paramétrage direct du cercle centré en 0 de rayon r, pour tout $t \in \mathbf{C}$
$$\mathrm{e}^{t\,A} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\Gamma_r} \mathrm{e}^{t\,\lambda}\,(\lambda\,\mathrm{I}_d - A)^{-1}\,\mathrm{d}\lambda\,.$$

---

1. On rappelle incidemment que les probabilistes appellent fonction caractéristique de X la fonction $t \mapsto F(-t)$.