Feuille d'exercices n° 5

Séries de Fourier & espaces fonctionnels

Dans la suite, on utilise le convention de Fourier suivante

$$c_j^T(u) := \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{2\,i\pi\,j}{T}\,x}\,u(x)\,dx\,.$$

Exercise 1. Soit $T > 0$.

1. Soit $2 \leq p \leq \infty$ et p' son indice de Lebesgue dual. Montrer que
   — si $u \in L^{p'}([0,T])$, alors $(c_j^T(u))_{j\in\mathbf{Z}} \in \ell^p(\mathbf{Z})$ avec
   $$\|(c_j^T(u))_{j\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^p(\mathbf{Z})} \;\leq\; T^{-\frac{1}{p'}}\,\|u\|_{L^{p'}([0,T])}$$
   — si $u \in L^1([0,T])$ est tel que $(c_j^T(u))_{j\in\mathbf{Z}} \in \ell^{p'}(\mathbf{Z})$, alors $u \in L^p([0,T])$ avec
   $$\|u\|_{L^p([0,T])} \;\leq\; T^{\frac{1}{p}}\,\|(c_j^T(u))_{j\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^{p'}(\mathbf{Z})}$$
2. Pour tout $s \geq 0$ et $1 \leq p \leq \infty$, on munit
   $$X^{s,p} \;:=\; \Big\{\, u \in L^1([0,T])\,;\, ((1+|j|^s)c_j^T(u))_{j\in\mathbf{Z}} \in \ell^{p'}(\mathbf{Z}) \,\Big\}$$
   de $\|\cdot\|_{X^{s,p}}$ défini par
   $$\|u\|_{X^{s,p}} := \|u\|_{\dot X^{0,p}} + \|u\|_{\dot X^{s,p}}$$
   où p' est l'indice dual de p et pour $\eta \geq 0$
   $$\|u\|_{\dot X^{\eta,p}} \;=\; \|(|j|^\eta\, c_j^T(u))_{j\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^{p'}(\mathbf{Z})}$$
   avec la convention que $0^0 = 1$.
   (a) Vérifier que pour tout $s \geq 0$ et $1 \leq p \leq \infty$, $X^{s,p}$ est un espace vectoriel normé et que, si $s - \frac{1}{p} > -\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{p}$, $X^{s,p}$ est un espace de Banach.
   (b) Montrer que si $0 \leq s_0 \leq s_1$, $1 \leq p \leq \infty$ et $u \in X^{s_0,p} \cap X^{s_1,p}$, alors pour tout $\theta \in [0,1]$, en posant $s_\theta := (1-\theta)s_0 + \theta s_1$, on a $u \in X^{s_\theta,p}$ avec
   $$\|u\|_{\dot X^{s_\theta,p}} \leq \|u\|_{\dot X^{s_0,p}}^{1-\theta}\,\|u\|_{\dot X^{s_1,p}}^{\theta}\,.$$
   (c) Montrer que si $1 \leq p \leq \infty$ et $s > \frac{1}{p}$, il existe $C > 0$ tel que si $u \in X^{s,p}$, alors u possède un représentant continu et
   $$\left\| u - \frac{1}{T}\int_0^T u \right\|_{L^\infty([0,T])} \;\leq\; C\,\|u\|_{\dot X^{0,p}}^{1-\theta}\,\|u\|_{\dot X^{s,p}}^{\theta}$$
   où θ est déterminé par
   $$0 \;=\; (1-\theta)\left(-\frac{1}{p}\right) + \theta\left(s - \frac{1}{p}\right)\,.$$

Exercise 2. Soit $T > 0$.

1. Soit $v \in L^2_{loc}(\mathbf{R})$ $T\mathbf{Z}$-périodique, $u = v_{|\,]0,T[}$ et $M > 0$ tel que
$$\|u\|_M := \|(\mathrm{e}^{\frac{2\pi|j|}{T}\,M}\, c_j^T(u))_{j\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^1(\mathbf{Z})} < \infty\,.$$
Montrer que v possède une unique extension continue $T\mathbf{Z}$-périodique à $\mathbf{R} + \mathrm{i}\,[-M, M]$ qui est analytique sur $\mathbf{R} + \mathrm{i}\,]-M, M[$, et si on note w cette extension
$$\|w\|_{L^\infty(\mathbf{R}+\mathrm{i}\,[-M,M])} \;\le\; \|u\|_M$$
et pour tout $0 \le M' < M$ et tout $k \in \mathbf{N}$
$$\|w^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbf{R}+\mathrm{i}\,[-M',M'])} \;\le\; \frac{\|u\|_M}{(M-M')^k}\,\sup_{a\in\mathbf{R}^+}(a^k\,\mathrm{e}^{-a}) \;\le\; \frac{k!\,\|u\|_M}{(M-M')^k}\,.$$

2. Soit $M > 0$ et $w : \mathbf{R} + \mathrm{i}\,[-M, M] \to \mathbf{C}$ continue $T\mathbf{Z}$-périodique, analytique sur $\mathbf{R} + \mathrm{i}\,]-M, M[$. Montrer que si on note $u = w_{|\,]0,T[}$, alors
$$\|(\mathrm{e}^{\frac{2\pi|j|}{T}\,M}\, c_j^T(u))_{j\in\mathbf{Z}}\|_{\ell^\infty(\mathbf{Z})} \;\le\; \|w\|_{L^\infty(\mathbf{R}+\mathrm{i}\,[-M,M])}$$
et pour tout $0 \le M' < M$
$$\|u\|_{M'} \;\le\; \frac{1+\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{T}\,(M-M')}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{T}\,(M-M')}}\|w\|_{L^\infty(\mathbf{R}+\mathrm{i}\,[-M,M])}\,.$$