

Feuille d'exercices n° 6

ANALYSE DE FOURIER & ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Dans la suite, on utilise la convention de Fourier suivante

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\xi \cdot x} u(x) dx, \quad \xi \in \mathbf{R}^d.$$

On utilisera aussi l'identification canonique des fonctions $u : X \times Y \rightarrow Z$, $(t, x) \mapsto u(t, x)$ avec les fonctions $X \rightarrow Z^Y$, $t \mapsto u(t, \cdot)$.

Exercice 1. Soit $d \in \mathbf{N}^*$ et $P \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_d]$ un polynôme de degré $M \in \mathbf{N}$ tel qu'il existe $R > 0$ et C tel que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}^d$ tel que $\|\xi\| \geq R$, l'on ait $|P(i\xi)| \geq C \|\xi\|^M$.

1. Montrer que si $d = 1$ tout polynôme non nul vérifie l'hypothèse.
2. Pour $d \geq 2$ donner un exemple de polynôme ne s'annulant pas sur $i\mathbf{R}^d$ mais ne vérifiant pas l'hypothèse.
3. On suppose de plus que P ne s'annule pas sur $i\mathbf{R}^d$.

Montrer que pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})$ il existe un unique $u \in H^M(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})$ tel que $P(\nabla)u = f$.

Exercice 2. Soit $d \in \mathbf{N}^*$ et $P \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_d]$ un polynôme de degré $M \in \mathbf{N}$ tel que

$$\sup_{\xi \in \mathbf{R}^d} \operatorname{Re}(P(i\xi)) < +\infty.$$

1. Déterminer à quelle condition sur $\alpha \in \mathbf{C}$ le polynôme P défini par $P(\nabla) = \alpha \Delta$ vérifie l'hypothèse.
2. Montrer que, pour tout $t \geq 0$, l'application linéaire

$$S(t) : L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}), \quad u_0 \mapsto \mathcal{F}^{-1}(e^{tP(i \cdot)} \mathcal{F}(u_0))$$

est bien définie et continue.

3. Soit $u_0 \in L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})$. On considère

$$u : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}, \quad (t, x) \mapsto S(t)(u_0)(x).$$

(a) Montrer que $u \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}))$.

(b) Montrer que si de plus $u_0 \in H^M(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})$ alors

$$u \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+; H^M(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})), \quad \partial_t u = P(\nabla)u \text{ et } u(0, \cdot) = u_0.$$

4. Montrer que si $T > 0$, $u \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^d(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}))$ avec $\partial_t u = P(\nabla)u$ et $v \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^d(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}))$, alors

$$\langle u(T, \cdot); v(T, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})} = \langle u(0, \cdot); v(0, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})} + \int_0^T \langle u(s, \cdot); (\partial_t v + \overline{P}(-\nabla)v)(s, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})} ds.$$

5. En déduire que pour tout $u_0 \in H^M(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})$, il existe un unique

$u \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}_+; H^M(\mathbf{R}^d; \mathbf{C})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbf{R}_+; L^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}))$ tel que $\partial_t u = P(\nabla)u$ et $u(0, \cdot) = u_0$.