

TD 1. Introduction aux équations aux dérivées partielles

Exercice 1. On considère les équations aux dérivées partielles suivantes, où $k(x)$ est une fonction continue et strictement positive sur $]0, 1[^2$:

1. $-\operatorname{div}_x(k(x)\nabla_x u(x)) = f(x)$ sur $\Omega =]0, 1[^2$,
2. $\partial_t u(x, t) - \operatorname{div}_x(k(x)\nabla_x u(x, t)) = f(x, t)$ sur $\Omega =]0, 1[^2 \times [0, T]$,
3. $\partial_{tt}^2 u(x, t) - \operatorname{div}_x(k(x)\nabla_x u(x, t)) = f(x, t)$ sur $\Omega =]0, 1[^2 \times [0, T]$,

avec $T > 0$ donné et f une fonction continue donnée.

Mettre ces EDP sous la forme canonique

$$\operatorname{div}(A\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu = f \quad (1)$$

où A est une matrice symétrique. Dire si ces équations sont elliptique, parabolique ou hyperbolique.

Exercice 2. 1. On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (x-1)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = 1 + x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

- (a) Considérant la donnée initiale $X(s) = x$ où s et x sont deux réels, résoudre l'EDO suivante :

$$X'(t) = X(t) - 1,$$

dont on notera la solution $X(t; (s, x))$ (préciser son domaine d'existence).

- (b) vérifier que u est constante le long des courbes $\{(t, X(t; (s, x))), t \in \mathbb{R}\}$ pour tout $(s, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. En déduire la forme explicite de la solution $u(t, x)$ du problème de Cauchy (2).

2. Soit $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Résoudre explicitement le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (t-x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3)$$

3. Soit $v_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Résoudre explicitement le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - y\frac{\partial v}{\partial x} + x\frac{\partial v}{\partial y} = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ v(0, x, y) = v_0(x, y), & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (4)$$

Déterminer les solutions stationnaires du modèle précédent, i.e. les fonctions $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telles que

$$-y \frac{\partial v}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (5)$$

Exercice 3. Sur une demi-droite en espace, on considère une équation de transport à vitesse constante $a > 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad (6)$$

assortie de deux données u_0 et u_b correspondant chacune à une partie du bord du domaine Ω :

$$\begin{cases} u(0, x) = u_0(x), & x \geq 0, \\ u(t, 0) = u_b(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

1. Démontrer que l'existence d'une solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ n'est possible que si les données u_0 et u_b sont elles-mêmes de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ et vérifient des relations de compatibilité que l'on identifiera.
2. Que se passe-t-il dans le cas où $a < 0$?