ENS Rennes - Université de Rennes 1
Magistère - Master 1 Mathématiques

TD 5. Équations elliptiques

Exercice 1. Identification de formulations variationnelles

On considère le problème suivant pour $f \in L^2(0,1)$ et $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$:

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que : } \quad \forall v \in V\,,\ a(u,v) = L(v) \tag{1}$$

$$\text{où} \quad a(u,v) = \int_0^1 u'(x)\, v'(x) dx, \quad L(v) = \int_0^1 f(x)\, v(x) dx + a_0\, v(0) + a_1\, v(1)$$

1. Vérifier si le problème est bien posé dans chacun des cas suivants :

$$V = H_0^1(0,1) \qquad V = H^1(0,1) \qquad V = \{v \in H^1(0,1)\,;\, v(0) = 0\}$$
$$V = \{v \in H^1(0,1)\,;\, v(0) = v(1)\} \qquad V = \{v \in H^1(0,1)\,;\, \int_0^1 v(x)\,dx = 0\}$$

2. Dans les cas bien posés, montrer que la solution u de (1) vérifie (au sens des distributions) une équation différentielle que l'on précisera. Montrer que $u' \in C^0[0,1] \cap H^1(0,1)$. En déduire que, pour tout $v \in V$, $a(u,v) - L(v)$ peut s'écrire sous une forme ne faisant intervenir que des termes au bord.
3. Montrer que, dans chacun des cas bien posés, (1) équivaut à un problème différentiel à conditions au bord, que l'on précisera.
4. Montrer que :

$$\text{si } f \in H^m(0,1) \text{ alors } u \in H^{m+2}(0,1) \qquad \text{et} \qquad \text{si } f \in C^m([0,1]) \text{ alors } u \in C^{m+2}([0,1])$$

Exercice 2. Fonction de Green en dimension 1

Soit $f \in C^0([0,1])$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} = f, & \text{pour } x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que la solution de ce problème s'écrit $u(x) = \int_0^1 G(x,y)\, f(y)\, dy$ avec

$$G(x,y) = y(1-x) \text{ si } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } G(x,y) = x(1-y) \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$$

2. En déduire le principe du maximum :

$$\text{si } f \geqslant 0 \text{ alors } u \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \text{si } f \geqslant 0 \text{ et } f \not\equiv 0 \text{ alors } u > 0$$

3. On remplace la condition de Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$ par une condition de Neumann : $u'(0) = 0 = u'(1) = 0$. Démontrer que le problème admet une solution, unique à une constante près, sous la condition nécessaire et suffisante

$$\int_0^1 f(x) dx = 0,$$

et que cette solution prend une forme similaire, avec le noyau donné cette fois par

$$G(x,y) = y - x \text{ si } 0 \leqslant y \leqslant x \text{ et } G(x,y) = 0 \text{ sinon}$$

4. Étudier le cas de la condition mixte Dirichlet-Neumann : $u(0) = u'(1) = 0$.

Exercice 3. Condition de Neumann homogène

On considère le problème avec condition de Neumann sur $I =]0,1[$:

$$\begin{cases} -u'' + u = f \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Montrer que si $f \in L^2(I)$, le problème admet une unique solution faible $u \in H^2(I)$.
Si de plus $f \in C^0([0,1])$, montrer que $u \in C^2([0,1])$ et est une solution forte.

Exercice 4. Problème elliptique en dimension d

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. On considère l'opérateur différentiel d'ordre 2 suivant :

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_{x_j}\left(a_{ij}\partial_{x_i}u\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i \partial_{x_i} u + cu$$

où les coefficients a_{ij}, b_i, c sont des fonctions $L^\infty(\Omega)$.
On définit la forme bilinéaire associée :

$$B(u,v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(\partial_{x_i}u)(\partial_{x_j}v) + \sum_{i=1}^{d} b_i(\partial_{x_i}u)v + cuv \right) dx$$

On dira que :

1. Ω est à bord "lisse" si son bord $\partial\Omega$ peut être paramétré par des fonctions lipschitziennes.
2. L est uniformément elliptique si il existe une constante $\theta > 0$ telle que :

$$p.p. x \in \Omega\,,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^d\,,\ \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \theta|\xi|^2$$

On se place dans la suite sous ces hypothèses. On admet l'inégalité de Poincaré valable si Ω est un ouvert borné à bord lisse :

$$\exists C > 0\,,\ \forall u \in H_0^1(\Omega)\,,\ \|u\|_{L^2} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}$$

1. Montrer que B est une forme bilinéaire continue sur $H_0^1(\Omega)$.
2. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ et $\gamma \geqslant 0$ tels que :

$$\forall u \in H^1(\Omega)\,,\ \beta\|u\|_{H_0^1}^2 \leqslant B(u,u) + \gamma\|u\|_{L^2}^2$$

3. Montrer que pour tout μ assez grand et $f \in L^2(\Omega)$, le problème elliptique

$$\begin{cases} Lu + \mu u = f \quad \text{sur } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

Remarque. La condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$ n'a évidemment pas de sens à proprement parler car u n'est pas forcément continue, mais est à comprendre ici au sens $u \in H_0^1(\Omega)$. On peut effectivement donner un sens rigoureux à u sur le bord mais c'est plus technique.